

Feuille d'exercices sur l'algèbre linéaire

Exercice 1

Soit $a \in \mathbb{R}$. Soit n un nombre entier naturel. On pose :

$$F = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid (\forall i \in \{0, \dots, n\}) P^{(i)}(a) = 0\},$$

$$G = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid P = 0 \text{ ou } \deg(P) \leq n\}.$$

- (1) Démontrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}[X]$ supplémentaires l'un de l'autre.
- (2) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Exprimer la composante de P relative à F pour la décomposition en somme directe $\mathbb{R}[X] = F \oplus G$.

Exercice 2

(Cet exercice est du cours)

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Soient F, G des sous-espaces vectoriels de E tels que $E = F \oplus G$, on définit le *projecteur de E sur F parallèlement à G* comme l'application π de E dans E qui à tout x associe le vecteur $x_F \in F$ où (x_F, x_G) est le couple de $F \times G$ tel que $x = x_F + x_G$.

- (1) Démontrer que π est linéaire et vérifie $\pi \circ \pi = \pi$.
- (2) Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ tel que $p \circ p = p$. Démontrer que $E = \text{Im}(p) \oplus \text{Ker}(p)$ puis que p est le projecteur de E sur $\text{Im}(p)$ parallèlement à $\text{Ker}(p)$.

Exercice 3

(Cet exercice est du cours)

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Soient F, G des sous-espaces vectoriels de E tels que $E = F \oplus G$, on définit la *symétrie de E par rapport à F parallèlement à G* comme l'application s de E dans E qui à tout x associe le vecteur $x_F - x_G$, où (x_F, x_G) est le couple de $F \times G$ tel que $x = x_F + x_G$.

- (1) Démontrer que s est linéaire.
- (2) (a) On note p le projecteur de E sur F parallèlement à G . Exprimer s en fonction de p .
(b) Démontrer que $s \circ s = \text{Id}_E$.
- (3) Soit f une application linéaire de E dans E telle que $f \circ f = \text{Id}_E$. On suppose que K est de caractéristique différente de 2. Démontrer que $\text{Ker}(f - \text{Id}_E)$ et $\text{Ker}(f + \text{Id}_E)$ sont supplémentaires dans E et que f est la symétrie de E par rapport à $\text{Ker}(f - \text{Id}_E)$ et parallèlement à $\text{Ker}(f + \text{Id}_E)$.

Exercice 4

Soit $(P_i)_{i \in I}$ une famille de $\mathbb{K}[X]$ telle que $P_i \neq 0$ pour tout $i \in I$. On suppose que l'application $I \rightarrow \mathbb{N}, i \mapsto \deg(P_i)$ est injective. Démontrer que $(P_i)_{i \in I}$ est libre.

Exercice 5

Soit E le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soit un ensemble I . Soit une application injective $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}$. Pour tout $i \in I$ on note f_i l'application $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto \exp(\alpha(i)t)$. Démontrer que $(f_i)_{i \in I}$ est libre.

Exercice 6

Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E .

- (1) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\text{Ker}(f^n) \subseteq \text{Ker}(f^{n+1})$.
- (2) Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $\text{Ker}(f^n) = \text{Ker}(f^{n+1})$. Soit $p \in \mathbb{N}$ tel que $p \geq n$. Démontrer que $\text{Ker}(f^p) = \text{Ker}(f^{p+1})$.
- (3) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\text{Im}(f^{n+1}) \subseteq \text{Im}(f^n)$.
- (4) Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $\text{Im}(f^n) = \text{Im}(f^{n+1})$. Soit $p \in \mathbb{N}$ tel que $p \geq n$. Démontrer que $\text{Im}(f^p) = \text{Im}(f^{p+1})$.
- (5) Soit $n \in \mathbb{N}$.
Démontrer qu'il existe une application linéaire injective de $\text{Ker}(f^{n+2})/\text{Ker}(f^{n+1})$ dans $\text{Ker}(f^{n+1})/\text{Ker}(f^n)$.
- (6) Soit $n \in \mathbb{N}$.
Démontrer qu'il existe une application linéaire surjective de $\text{Im}(f^n)/\text{Im}(f^{n+1})$ dans $\text{Im}(f^{n+1})/\text{Im}(f^{n+2})$.

Exercice 7

Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in L(E)$. Montrer que $\ker(f) \subset E$ admet un supplémentaire stable par f si et seulement si $\ker(f) = \ker(f^2)$. Si c'est le cas, montrer que ce supplémentaire est $\text{im}(f)$.

Exercice 8

Soient U , V et W les sous-ensembles de $\mathbb{R}^3$ suivants :

$$U = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid a+b+c = 0\}; \quad V = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid a = c\}; \quad W = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid a = 0, b = 0\}.$$

- (1) Montrer que U , V et W sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$
- (2) Montrer que $\mathbb{R}^3 = U + V$; $\mathbb{R}^3 = U + W$; $\mathbb{R}^3 = V + W$. Quand la somme est-elle directe ?

Exercice 9

Considérons les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$ suivants :

$$D_1 = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid b = 0\}; \quad D_2 = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a = 0\}; \quad D_3 = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a = b\}.$$

Montrer que $\mathbb{R}^2 = D_1 + D_2 + D_3$. La somme est-elle directe ?

Exercice 10

On considère dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, la droite vectorielle D engendrée par le vecteur $(-1, 1, 2)$, et l'ensemble $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - z = 0\}$.

- (1) Démontrer que $P \oplus D = \mathbb{R}^3$.
- (2) Donner l'expression de la décomposition d'un vecteur de $\mathbb{R}^3$ selon la somme directe précédente.

Exercice 11

Soit $\mathcal{P}_n$ l'espace des fonctions polynômes sur $\mathbb{R}$ de degré inférieur ou égal à n . Soit $v: \mathcal{P}_n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ l'application donnée par

$$v(p) = (p(0), p(1), \dots, p(n)).$$

- (1) Montrer que v est un isomorphisme de $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels.

- (2) Soit $\{e_i, 1 \leq i \leq n+1\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$. Déterminer les fonctions polynômes $v^{-1}(e_i)$ pour $1 \leq i \leq n+1$.
- (3) Soient p_i la fonction polynôme $p_i(x) = x^i$. Déterminer la matrice de v par rapport aux bases $\{p_i, 1 \leq i \leq n+1\}$ de $\mathcal{P}_n$ et $\{e_i, 1 \leq i \leq n+1\}$ de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Exercice 12

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- (1) Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres associés à f .
- (2) Déterminer une base V_1, V_2, V_3, V_4 de $\mathbb{R}^4$ dans laquelle la matrice de f est

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- (3) Déterminer tous les sous-espaces F de $\mathbb{R}^4$ stables par f , c'est-à-dire tels que $f(F) \subset F$.

Exercice 13

Soit $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soit F l'ensemble des applications constantes, $G = \{f \in E; f|_{\mathbb{R}^+} = 0\}$ et $H = \{f \in E; f|_{\mathbb{R}^-} = 0\}$. Montrer que F, G et H sont des sous espaces vectoriels de E et que $E = F \oplus G \oplus H$. (Indication : trouver en premier lieu la composante sur F).

Exercice 14

Soit $E = \mathbb{C}_n[X]$, l'espace vectoriel des polynômes à coefficients complexes de degré $\leq n$. On pose

$$Q_k = X(X-1)\dots(X-k+1), \quad k \geq 1, \quad \text{et } Q_0 = 1.$$

Soit $\Delta : E \rightarrow E$ définie par $\Delta(P)(X) = P(X+1) - P(X)$.

- (1) Montrer que l'ensemble des polynômes $Q_k, 0 \leq k \leq n$, forme une base de E .
- (2) Calculer $\Delta(Q_k)$ pour tout k et en déduire $\text{Im}(\Delta)$. Déterminer le noyau de Δ .
- (3) On pose $\Delta^k = \underbrace{\Delta \circ \dots \circ \Delta}_{k \text{ fois}}$. Montrer que si P est de degré n , alors $\Delta^n P \neq 0$ et $\Delta^{n+1} P = 0$ et que l'on a

$$P(X) = P(0) + \frac{(\Delta P)(0)}{1!} Q_1(X) + \frac{(\Delta^2 P)(0)}{2!} Q_2(X) + \dots \\ \dots + \frac{(\Delta^k P)(0)}{k!} Q_k(X) + \dots + \frac{(\Delta^n P)(0)}{n!} Q_n(X).$$

Exercice 15

Soit E un espace vectoriel sur K de dimension $n \geq 2$. Soit f un endomorphisme de E qui commute avec tout endomorphisme de E : pour tout $g \in \mathcal{L}(E)$, $g \circ f = f \circ g$.

- (1) Fixons $x \neq 0 \in E$ et complétons le en une base $\mathcal{B} = (e_1 = x, e_2, \dots, e_n)$ de E . Soit g l'application linéaire définie par $g(x) = x$ et $g(e_i) = 0, \forall i > 1$. En utilisant cette application, montrer qu'il existe $\lambda_x \in K$ tel que $f(x) = \lambda_x x$.
- (2) Soient (x, y) une famille libre de vecteurs de E et $\mu \neq 0 \in K$. Montrer que $\lambda_{x+y} = \lambda_x = \lambda_y$. Montrer que $\lambda_{\mu x} = \lambda_x$. En déduire que le centre de $\mathcal{L}(E)$ (i.e. l'ensemble des endomorphismes commutant avec tous les autres) est formé des homothéties.

Exercice 16

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie n et soit $f \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $f^2 = -\text{Id}$.

- 1- Soit $x \in E, x \neq 0$. Montrer que $(x, f(x))$ est une famille libre.
- 2- Si $n \geq 3$, montrer qu'il existe des vecteurs e_1 et e_2 tels que

$$(e_1, f(e_1), e_2, f(e_2))$$

forme une famille libre de E . (Pensez au théorème de la base incomplète). En déduire que E est de dimension paire.

- 3- Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f a la forme

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Exercice 17

Montrer que pour toute forme linéaire ϕ sur $M_n(K)$, il existe une unique matrice $A \in M_n(K)$ telle que $\phi(X) = \text{Tr}(AX), \forall X \in M_n(K)$. En déduire que si ϕ est une forme linéaire sur $M_n(K)$ satisfaisant $\phi(AB) = \phi(BA), \forall A, B \in M_n(K)$, alors il existe $\lambda \in K$ telle que $\phi(X) = \lambda \text{Tr}(X)$, pour tout $X \in M_n(K)$.

Exercice 18

Soit $\mathbb{H}$ l'ensemble des matrices M de $M_2(\mathbb{C})$ de la forme

$$M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$$

pour α et β dans $\mathbb{C}$, $\bar{\alpha}$ désignant le conjugué de α .

- 1- Prouver que $\mathbb{H}$ est un corps non commutatif, appelé corps des quaternions.
- 2- Prouver que $\mathbb{H}$ n'est pas un sous- $\mathbb{C}$ -espace vectoriel du $\mathbb{C}$ -espace vectoriel $M_2(\mathbb{C})$.
- 3- Prouver que $\mathbb{H}$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et que les matrices

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_4 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

en constituent une base. Calculer dans cette base tous les produits $e_i e_j$.