

Feuille de TD 1 - Les nombres complexes

Exercice 1. Écrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} \frac{2}{1-2i}, & \text{(b)} \frac{1}{1-2i} + \frac{1}{1+2i}, & \text{(c)} \frac{2+i}{3-2i}, \\ \text{(d)} \left(\frac{1+i}{2-i} \right)^2, & \text{(e)} \frac{2+5i}{1-i} + \frac{2-5i}{1+i}, & \text{(f)} \left(\frac{1+i}{2-i} \right)^2 + \frac{3+6i}{3-4i}. \end{array}$$

Exercice 2. Écrire sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants.

$$\begin{array}{llll} \text{(a)} -3\sqrt{2}, & \text{(b)} -\frac{4}{3}i, & \text{(c)} \pi i, & \text{(d)} 3+3i, \\ \text{(e)} \sqrt{3}-i, & \text{(f)} \sqrt{2}+\sqrt{6}i, & \text{(g)} \frac{1-i}{\sqrt{3}+i}, & \text{(h)} (1-i)^9, \\ \text{(i)} (\sqrt{5}-i)(\sqrt{5}+i), & \text{(j)} e^{3+4i}, & \text{(k)} e^{i\frac{\pi}{3}} + e^{i\frac{2\pi}{3}}, & \text{(l)} \sqrt{3}i + e^{-i\pi}. \end{array}$$

Exercice 3. Écrire sous forme exponentielle les nombres complexes suivants :

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} e^{e^{i\theta}}, & \text{(b)} e^{i\theta} + e^{i\theta'}, & \text{(c)} e^{i\theta} - e^{i\theta'}, \\ \text{(d)} \frac{e^{i\theta} + e^{i\theta'}}{e^{i\theta} - e^{i\theta'}} \text{ (ce nombre est-il toujours bien défini ?)}. \end{array}$$

Exercice 4. Soit $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ un nombre complexe non nul écrit sous forme trigonométrique. Écrire $\bar{z}$, $-z$, $\frac{1}{z}$ sous forme trigonométrique.

Exercice 5. Soit α un réel non congru à $\frac{\pi}{2}$ modulo π et $t = \tan \alpha$.

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \text{ Quelle est la forme exponentielle de } z = \frac{1+it}{1-it} ? \\ \text{(b)} \text{ Mettre } z \text{ sous forme algébrique et en déduire que } \cos(2\alpha) = \frac{1-t^2}{1+t^2} \text{ et } \sin(2\alpha) = \frac{2t}{1+t^2}. \end{array}$$

Exercice 6. Soient A, B et C trois points du plan complexe d'affixes

$$z_A = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}, \quad z_B = 4+2i, \quad z_C = -5-i.$$

Calculer les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et montrer que A, B et C sont alignés.

Exercice 7. Soient E, F et G trois points du plan complexe d'affixes

$$z_E = -2i, \quad z_F = -\sqrt{3}+i, \quad z_G = \sqrt{3}+i.$$

Donner la forme algébrique de $\frac{z_F - z_E}{z_G - z_E}$ et la forme trigonométrique. En donner une interprétation géométrique.

Exercice 8. Soit $z = x + iy$ un nombre complexe différent de -2 et $Z = \frac{z+3i}{z+2}$.

a) Exprimer Z sous forme algébrique.

b) Déterminer l'ensemble des points M du plan complexe d'affixe z vérifiant Z est imaginaire pur.

Exercice 9. Trouver les racines carrées complexes des nombres suivants :

- (a) 16, (b) $4i$, (c) $3 + 4i$, (d) $-1 + i\sqrt{3}$, (e) $1 + i$,
 (f) $6 - 8i$, (g) $i - 2$, (h) $2e^{i2\pi/5}$, (i) $-5 - 12i$, (j) $\frac{1+i}{1-i}$.

Exercice 10. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ un nombre réel. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

- (a) $z^2 - 2\cos(\theta)z + 1 = 0$,
 (b) $z^4 - 2\cos(2\theta)z^2 + 1 = 0$.

Exercice 11. (a) Calculer les racines carrées de $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ sous forme algébrique et exponentielle.

(b) En déduire les valeurs de $\cos(\pi/8)$ et $\sin(\pi/8)$.

(c) En utilisant la même méthode, calculer les valeurs de $\cos(\pi/12)$ et $\sin(\pi/12)$.

Exercice 12. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

- (a) $z^2 + z + 1 = 0$, (b) $z^2 - iz + 2 = 0$,
 (c) $(3 - i)z^2 + (4i - 2)z - 8i + 4 = 0$, (d) $z^2 - (1 + 2i)z + i - 1 = 0$,
 (e) $z(z - i) = iz + 2$, (f) $z^2 - 3z + 3 + i = 0$,
 (g) $z^4 + 2z^3 + 4z^2 = 0$, (h) $z^4 + 2z^2 + 4 = 0$.

Exercice 13. (a) Déterminer les formes algébriques et exponentielles des racines 8-ièmes de l'unité, puis décrire la figure obtenue dans le plan complexe en joignant ces racines avec arguments consécutifs.

(b) Déterminer les formes algébriques et exponentielles des racines cinquièmes de i , puis décrire la figure obtenue dans le plan complexe en joignant ces racines avec arguments consécutifs.

(c) Sachant que $(2 + 4i)^6 = 7488 + 2816i$ donner les racines sixièmes de $7488 + 2816i$.

Exercice 14. Dans cet exercice, on admettra que $e^{i2\pi/5} = (\sqrt{5} - 1 + i\sqrt{10 + 2\sqrt{5}})/4$ et on notera μ ce nombre complexe.

(a) Écrire sous forme algébrique $z = e^{i\pi/3}$.

(b) Écrire μ/z sous forme trigonométrique et algébrique.

(c) En déduire les valeurs de $\cos \frac{\pi}{15}$ et $\sin \frac{\pi}{15}$.

Exercice 15. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

- (a) $z^4 + 1 = 0$, (b) $z^5 + 1 = 0$, (c) $z^6 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i\sqrt{3}}$,
 (d) $z^6 - 2iz^3 - 1 = 0$, (e) $z^2 - 2\bar{z} = 0$, (f) $z^n = \bar{z}$,
 (g) $z^2 + \bar{z} - 1$ est réel, (h) $\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^3 + \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^3 = 0$.

À partir de (b), déduire les valeurs de $\cos \frac{\pi}{5}$ et $\sin \frac{\pi}{5}$.

Exercice 16. (a) Calculer les racines n -ième de $-i$ et de $1 + i$.

(b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - z + 1 - i = 0$.

(c) En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^{2n} - z^n + 1 = 0$.

Exercice 17. En utilisant la formule du binôme de Newton, développer les expressions suivantes :

- (a) $(a + b)^6$, (b) $(x + iy)^4$, (c) $(1 + i)^5$,
 (d) $(1 - 2i)^3$, (e) $(10 + 1)^4$, (f) $(a + b + c)^3$.

Exercice 18. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer :

- (a) $(1 + i)^n + (1 - i)^n$, (b) $(1 + i)^n - (1 - i)^n$, (c) $\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)^{2n}$.

Exercice 19. Exprimer en fonction de $\cos \alpha$ et $\sin \alpha$ les formules trigonométriques suivantes :

- (a) $\cos(3\alpha)$, (b) $\sin(3\alpha)$, (c) $\cos(4\alpha)$, (d) $\sin(5\alpha)$,

Exercice 20. Soit α un nombre réel. Linéariser les formules trigonométriques suivantes :

- (a) $\cos^3 \alpha$, (b) $\sin^3 \alpha$, (c) $\cos^4 \alpha$,
 (d) $\sin^4 \alpha$, (e) $\cos^5 \alpha$, (f) $\sin \alpha \cos^3 \alpha$.

Exercice 21. Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la valeur de $\sum_{k=0}^{n-1} \sin(k\alpha)$.

Annales

Exercice 22 (Examen, 2013). Dans cet exercice, α désigne un nombre réel tel que $\cos(\alpha) \neq 0$.

- (a) Rappeler les définitions du module et d'un argument d'un nombre complexe $z \neq 0$.
 (b) Écrire sous forme exponentielle le nombre complexe $-i$.
 (c) Écrire sous forme exponentielle le nombre complexe z_0 donné par :

$$z_0 = \frac{1 + i \tan(\alpha)}{1 - i \tan(\alpha)}.$$

- (d) Trouver les nombres réels α vérifiant l'équation :

$$\left(\frac{1 + i \tan(\alpha)}{1 - i \tan(\alpha)}\right)^2 = -i.$$

Exercice 23 (Partiel, 2013). (a) Exprimer les racines 3-ièmes de l'unité sous formes exponentielle, trigonométrique et cartésienne.

- (b) Exprimer les racines 3-ièmes de $2 + 2i$ sous formes exponentielle et trigonométrique.
 (c) À l'aide du point (a), exprimer les racines 3-ièmes de $2 + 2i$ sous forme cartésienne.
 (d) En déduire les valeurs de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.
 (e) Exprimer $\sin(2\alpha)$ en fonction de $\cos \alpha$ et $\sin \alpha$.
 (f) Linéariser $\cos^3 \alpha$.
 (g) Vérifier les formules des points (e) et (f) pour $\alpha = \frac{\pi}{12}$.

Exercice 24 (Examen, 2014). Les deux parties sont *indépendantes*.

1. **Racines d'un nombre complexe**

- (a) Calculer le module et un argument du nombre complexe $16 + 16i\sqrt{3}$. En déduire la forme exponentielle ou trigonométrique de $16 + 16i\sqrt{3}$.
- (b) Déterminer (sous forme exponentielle ou trigonométrique) tous les nombres complexes z tels que

$$z^5 = 16 + 16i\sqrt{3}.$$

2. **Équation de degré deux dans $\mathbb{C}$**

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z

$$z^2 - (3 - i)z + 4 = 0.$$

Exercice 25 (Partiel, 2014). 1. Écrire le nombre complexe $-i$ sous forme exponentielle.

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 = -i$.

On définit $u = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$.

3. Exprimer u sous forme exponentielle et calculer u^3 , u^5 , u^{11} et u^{24} sous formes exponentielles, trigonométriques et cartésiennes, en faisant le moins de calculs possibles.

Exercice 26 (Examen, 2014). 1. Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation $z^6 = 1$.

2. Montrer que i est une solution de l'équation $z^6 = -1$. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation $z^6 = -1$ dans $\mathbb{C}$ en exprimant les racines de cette équation sous formes exponentielles, cartésiennes et trigonométriques, et les dessiner sur le cercle unité.