Feuille de TD n° 5 : Continuité

Exercice 1. Déterminer le domaine de définition et discuter de la parité de la fonction f dans les exemples suivants.

(a) $f(x) = \frac{x+4}{x^2-9}$,
(b) $f(x) = \frac{2x^3-5}{x^2+x-6}$,
(c) $f(x) = \sqrt{2+x} - \sqrt{3-x}$,
(d) $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$,
(e) $f(x) = x - |x|$,
(f) $f(x) = \frac{x}{|x|}$,
(g) $f(x) = \sin(x)\cos^2(x)$,
(h) $f(x) = \tan(x) - \cos(x)$,
(i) $f(x) = \frac{\mathrm{ch}(x)}{\mathrm{sh}(x)}$,
(j) $f(x) = \frac{\ln(x^2-1)}{\ln(|x-1|)}$.

Exercice 2. Représentez graphiquement, dans chaque cas ci-dessous, une fonction qui satisfait les conditions suivantes.

(a) $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -1$, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 2$, $f(0) = 1$.

(b) $\lim_{x\to 0^-} g(x) = 2^+$, $\lim_{x\to 0^+} g(x) = 0^-$, $\lim_{x\to 4^-} g(x) = 3$, $\lim_{x\to 4^+} g(x) = +\infty$, $g(5) = 1$, $g(0) = 2$.

Exercice 3. Soit une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie sur un intervalle $[a, +\infty[$, $(a \in \mathbb{R})$.

a. Montrer que si $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ existe et est finie alors il existe un intervalle de la forme $[r, +\infty[$ $(r \in \mathbb{R})$ sur lequel f est bornée.

b. Montrer que si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ alors il existe un intervalle de la forme $[r, +\infty[$ $(r \in \mathbb{R})$ sur lequel f est minorée.

c. En déduire que si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ alors il existe un intervalle de la forme $[r, +\infty[$ $(r \in \mathbb{R})$ sur lequel f est majorée.

Exercice 4. Considérons la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x \sin x$.

a. Démontrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$, la fonction f n'est ni majorée ni minorée sur $[a, \infty[$.

b. En utilisant les résultats de l'exercice précédent, que pouvez-vous dire de la limite de f en $+\infty$?

Exercice 5. Calculer les limites suivantes, si elles existent :

(a) $\lim_{x\to 0} x^2 - 2x$,
(b) $\lim_{x\to 1} x^2 - 4x + 3$,
(c) $\lim_{x\to 2} x^2 - 2x$,
(d) $\lim_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x+2}-3}{x-3}$,
(e) $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2-1}$,
(f) $\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2-3}$,
(g) $\lim_{x\to+\infty} 1 + x + \ln x$,
(h) $\lim_{x\to+\infty} x^4 e^x \ln^2 x$,
(i) $\lim_{x\to+\infty} x e^{\frac{1}{x}}$,
(j) $\lim_{x\to 1^-} \dfrac{1}{x^4-1}$,
(k) $\lim_{x\to 1^+} \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$,
(l) $\lim_{x\to 1^-} \dfrac{1}{(x^2-1)(x+2)}$,
(m) $\lim_{x\to 1} \cos\left(e^{-\frac{1}{(x-1)^2}}\right)$,
(n) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{1+\tan\frac{1}{x}}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{x}\right)}$,
(o) $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$,

(p) $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{e^{\frac{1}{x^2}} + \frac{1}{x^2} + x}{\sin x}$, (q) $\lim_{x\to 0^+} \sin \dfrac{1}{x}$, (r) $\lim_{x\to 0} \dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$,

(s) $\lim_{x\to 1^+} (x-1)^{\frac{2}{x-1}}$, (t) $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{2x^2+1}{x^2+2}$, (u) $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{x}{x^2+1}$,

(v) $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{x^2+x}{x-1}$.

Exercice 6. Dire si les fonctions suivantes sont continues sur leur ensemble de définition (justifier).

a. $E : [0,2] \to \mathbb{R}$ (E est la partie entière).

b. $E : [0,1[\to \mathbb{R}$.

c. $E : [n, n+1[\to \mathbb{R}$ où $n \in \mathbb{Z}$.

d. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{x^3+4x^2-x+7}{x^4+x^2+1}$.

e. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-6x^2+9x-4}{x^3-x^2+x-1} & \text{si } x \neq 1 \\ 0 & \text{si } x = 1. \end{cases}$

f. $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \begin{cases} x \log x & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

g. $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

h. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

i. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{2}\cos(E(x))$.

j. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = E(\frac{1}{2}\cos(x))$.

Exercice 7. On considère la fonction $f :]0;+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sin(\frac{1}{x})$.

a. Donner l'ensemble $X = \{x \in \mathbb{R},\ \sin(x) = 1\}$ et l'ensemble $Y = \{y \in \mathbb{R},\ \sin(y) = 0\}$

b. Trouver une suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ telle que $\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$ et pour tout $n \geqslant 1$, $\sin(\frac{1}{x_n}) = 1$.

c. Trouver une suite $(y_n)_{n\geqslant 1}$ telle que $\lim_{n\to+\infty} y_n = 0$ et pour tout $n \geqslant 1$, $\sin(\frac{1}{y_n}) = 0$.

d. A l'aide des questions précédentes, démontrer que la fonction f ne peut pas être prolongée par continuité en 0.

Exercice 8. Soient I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue.
Que dire des affirmations suivantes ? On prendra soin de justifier sa réponse en s'appuyant sur un résultat de cours ou sur un contre-exemple.

a. L'image par f d'un intervalle de I est un intervalle.

b. L'image par f d'un intervalle ouvert de I est un intervalle ouvert.
c. L'image par f d'un intervalle borné de I est un intervalle borné.
d. L'image par f d'un segment (intervalle fermé et borné) de I est un segment.

Exercice 9.
a. Existe-t-il une application $f : [0, 1] \to [0, +\infty)$ continue et surjective ? Si oui,en donner un example.
b. Existe-t-il une application $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue et telle que

$$f(\mathbb{R}_+) = [-1, 0] \cup [1, +\infty)?$$

Exercice 10.
Donner un exemple de fonction numérique f définie sur $I = [0, 2]$ telle que :
a. $f(I)$ ne soit pas un intervalle ;
b. $f(I)$ soit un intervalle fermé et borné ;
c. $f(I)$ soit un intervalle ouvert et borné ;
d. $f(I)$ soit un intervalle non borné.

Exercice 11.
Donner des exemples d'applications continues et bijectives des types suivants :
$f_1 :]0, 1[\to]1, 4[$, $f_2 : [0, 1[\to]1, 4]$, $f_3 :]0, 1[\to \mathbb{R}$,
$f_4 :]0, 1[\to]0, +\infty[$, $f_5 : [0, +\infty[\to] - \infty, 0]$.

Exercice 12.
a. Peut-on trouver une application continue et injective de $]0, 1[$ dans $[0, 1[$?
b. Peut-on trouver une application continue et surjective de $]0, 1[$ sur $[0, 1[$?
c. Peut-on trouver une application continue strictement monotone et surjective de $]0, 1[$ sur $[0, 1[$?
d. Peut-on trouver une application continue strictement monotone et surjective de $]0, 1]$ sur $[0, 1[$?

Exercice 13.
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $d \in \mathbb{R}_+$. Montrer, en invoquant un résultat de cours, que $x \mapsto x^n - d$ admet au moins une racine dans $\mathbb{R}$. Que dire des racines positives ?

Exercice 14. Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ une fonction croissante telle que $x \mapsto \dfrac{f(x)}{x}$ soit décroissante. Montrer que f est continue.

Exercice 15. Étudier et dessiner le graphe des fonctions $f(x) = x^2 - x^{\frac{3}{2}}$ et $g(x) = 3^x - 2^x$.

Exercice 16. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in (-\infty, 1) \\ x^2 & \text{si } x \in [1, 4] \\ 8\sqrt{x} & \text{si } x \in (4, +\infty). \end{cases}$$

a. Montrer que f est strictement croissante.

b. Tracer le graphe de f.

c. f est-elle continue ?

d. Montrer que f est bijective

e. Trouver la bijection réciproque f^{-1} de f.

Exercice 17.
Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues.

a. Montrer que, si f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, alors f est de signe constant.

b. Montrer que, si f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ et que $|f| = |g|$, alors $f = g$ ou $f = -g$.

c. Donner un exemple de fonctions continues f et g telles que $|f| = |g|$ mais $f \neq g$ et $f \neq -g$.

Exercice 18.

a. Soit $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$ et $f : [a, b] \to [a, b]$ une application continue.
Montrer que f admet un point fixe, c'est-à-dire qu'il existe $x_0 \in [a, b]$ tel que $f(x_0) = x_0$.
Indication : étudier la fonction $x \mapsto f(x) - x$.

b. Montrer que toute fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continue et bornée admet un point fixe.

c. Montrer que toute fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continue et périodique est bornée et, donc, qu'elle admet un point fixe.

Exercice 19.
Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue.
Le but de l'exercice est de montrer que $\sup\limits_{x \in]a,b[} f(x) = \sup\limits_{x \in [a,b]} f(x)$.

a. Montrer que $\sup\limits_{x \in]a,b[} f(x) \leqslant \sup\limits_{x \in [a,b]} f(x)$.

b. Rappeler pourquoi il existe $x_0 \in [a, b]$ tel que $f(x_0) = \sup\limits_{x \in [a,b]} f(x)$.

c. Montrer que $f(x_0) = \sup\limits_{x \in]a,b[} f(x)$ en distinguant les trois cas suivants :

cas 1 : $x_0 = a$ **cas 2 :** $x_0 = b$ **cas 3 :** $x_0 \in]a, b[$.

Indication : Dans le cas où $x_0 = a$, on pourra considérer la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*} = \left(\min\left(a + \frac{1}{n}, b\right)\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et étudier la suite $(f(a_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$.

d. *Contrexemple :* soit maintenant la fonction $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, 1[\\ 1 & \text{si } x = 1. \end{cases}$

Montrer que $\sup\limits_{x \in]0,1[} g(x) \neq \sup\limits_{x \in [0,1]} g(x)$.
Quelle hypothèse est essentielle dans la propriété démontrée auparavant ?

Exercice 20. ***Examen 2009-2010*** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^3 - 3x$.

a. Etudier les variations de f, calculer $f(1), f(3)$, et $f(-3)$, et tracer la fonction f sur une figure.

b. On note g la restriction de f à l'intervalle $[1; +\infty[$. Montrer que $g([1; +\infty[)$ est un intervalle de la forme $[\alpha; +\infty[$ ou' α est un nombre réel que l'on précisera.

c. Montrer que $g : [1; +\infty[\to [\alpha; +\infty[$ est bijective, et montrer que l'application réciproque est continue et strictement monotone.

Exercice 21. ***Examen, deuxième session, 2009-2010*** Justifier les réponses aux questions suivantes.

a. Existe-t-il une application $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ continue et telle que $f([0, 1]) = [0, 1] \cup [2, 3]$?

b. Existe-t-il une application $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ continue et surjective ?

c. Existe-t-il une application $f :]0, 1[\to \mathbb{R}$ continue, strictement croissante et telle que $f(]0, 1[) = [0, 1]$?

Exercice 22. ***Examen 2010-2011***

a. Rappeller l'énoncé du théorème des valeurs intermédiaires.

b. Rappeller l'énoncé du théorème définissant l'image d'un segment $[a, b]$ $(a < b)$ par une application continue.

c. Existe-t-il une application $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ continue et telle que $f([0, +\infty[) = [-1, 0] \cup [1, +\infty[$?

d. Existe-t-il une application $f : [0, 1] \to [0, +\infty[$ continue et surjective ?

Exercice 23. ***Examen 2011-2012, session 2*** On considère la fonction $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \frac{x^2+x-1}{x^2+1} - e^{-\frac{1}{x}}$.

a. Déterminer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

b. Rappeller la définition exacte (en terme de ε) de la formule : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$, où $l \in \mathbb{R}$.
En déduire à l'aide de la première question qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall x \in]c, +\infty[f(x) \leqslant 1$.

c. Montrer que f se prolonge par continuité en une fonction $g : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par :

$$g(x) = \begin{cases} g(0) = y_0 \\ g(x) = f(x) \text{ si x>0}, \end{cases}$$

où y_0 est un réel que l'on précisera.

d. À l'aide d'un théorème du cours qu'on énoncera, montrer qu'il existe un réel $x_0 \in [0, c]$ tel que : $\forall x \in [0, c], g(x) \leqslant g(x_0)$. En déduire à l'aide de la question 2 que f est majorée sur $]0, +\infty[$.

e. Montrer que $f(2) > 0$. À l'aide d'un théorème du cours qu'on énoncera, en déduire que l'équation $f(x) = 0$ a au moins une solution dans $]0, 2[$.