Structures à homotopies près
Muriel Livernet
Cours spécialisé

Résumé: Etant donné un espace topologique X, on peut considérer son espace de lacets ΩX. Ce dernier a l'avantage d'être muni d'une structure multiplicative, qui n'est pas associative mais qui est associative à homotopie près. Stasheff a caractérisé les espaces de lacets en montrant qu'ils étaient associatifs à "toutes" homotopies près: ce sont des A_∞-espaces. Si l'on considère un espace de lacet double, la multiplicaiton est non seulement associative à "toutes" homotopies près mais est aussi commutative à une homotopie près. Au bout de la chaine se trouvent les espaces de lacets infinis, qui ont une structure commutative à toutes homotopies près. Les opérades ont été inventées dans les années 60 par Boardman et Vogt, afin de comprendre, en étendant les travaux de Stasheff, les structures sur les espaces de lacets n-itérés. C'est ce que l'on appelle les structures E_n. Dans ce cours nous présenteront certains développements récents sur ce sujet.

Objectif: Comprendre les structures E_n à l'aide de la théorie des opérades, ainsi que certains modèles et leurs utilisations en homologie de Hochschild supérieure.

Plan du cours:

(1) Espaces de lacets, A_∞-espaces. Opérades topologiques, opérades des petits disques
(2) Des opérades topologiques aux opérades algébriques via le complexe des chaines singulières. Présentation de l'homologie des opérades des petits disques.
 `Expliquer le crochet sur` $H_*(\Omega^2 X)$.
(3) Opérades E_n en topologie et en algèbre.
(4) Différents modèles d'opérades E_n d'après Berger et McClure et Smith.
(5) Exemple de structures E_∞: le complexe des cochaines singulières d'un espace.
(6) Homologie de Hochschild supérieure.
(7) Questions d'actualités.

Prérequis: Solides bases en topologie algébrique. Des notions de catégories modèles et d'opérades pourront être utiles.

Bibliographie:

Livres sur les opérades:

Y. I. Manin, *Frobenius manifolds, quantum cohomology, and moduli spaces* Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999, (un excellent chapitre de présentation des opérades)

M. Markl, S. Schnider, J. Stasheff, *Operads in Algebra, Topology and Physics*, Mathematical Surveys and Monographs, 96, AMS, Providence, RO, 2002, (applications des opérades à divers domaines mathématiques)

J.-L. Loday, B. Vallette, *Algebraic Operads*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Volume 346, Springer-Verlag (2012). (traite des opérades algébriques)

Liste non exhaustive d'articles servant comme support du cours:

C. Balteanu, Z. Fiedorowicz, R. Schwnzl, R. Vogt, *I*terated monoidal categories. Adv. Math. 176 (2003), no. 2, 277-349.

C. Berger, *Opérades cellulaires et espaces de lacets itérés*, Ann. Inst. Fourier 46 (1996), 1125-1157

C. Berger et B. Fresse, *Combinatorial operad actions on cochains*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 137 (2004), 135-174

M. Livernet et B. Richter, *An interpretation of En-homology as functor homology*, Mathematische Zeitschrift, Volume 269, Numbers 1-2 / Oktober 2011, 193–219

Michael A. Mandell, *Cochains and Homotopy Type*, Publ. Math. IHES, 103 (2006), 213-246.

J. McClure et J. Smith, *A solution of Deligne's Hochschild cohomology conjecture*. In Recent progress in homotopy theory, 293, Contemp. Math., pages 153-193. AMS, Providence, RI, 2002.

J. McClure, J. Smith, Jeffrey, *Multivariable cochain operations and little n-cubes*, J. Amer. Math. Soc. 16 (2003), no. 3, 681-704.