Chapitre 1 - Notions de base -

1 - Le langage des catégories.

1.1 - Déf générale

"Déf" Une catégorie $\mathcal{C}$ (localement petite) est la donnée d'une "classe" d'objets $Ob(\mathcal{C})$ et pour tout couple d'objets a, b de $\mathcal{C}$ un ensemble de morphismes, noté $\mathcal{C}(a,b)$ ou $Hom_{\mathcal{C}}(a,b)$ tels que

1) pour tout $a \in Ob(\mathcal{C})$, il existe un morphisme $1_a \in \mathcal{C}(a,a)$, appelé identité

2) Pour tout triplet d'objets a, b, c il existe une application appelée composition

$$\mathcal{C}(b,c) \times \mathcal{C}(a,b) \to \mathcal{C}(a,c)$$
$$(g, f) \mapsto g \circ f$$

vérifiant :

a) $\forall g \in \mathcal{C}(b,c)$ $\quad g \circ 1_b = g$, $\quad 1_c \circ g = g$

b) $\forall f \in \mathcal{C}(a,b)$, $\forall g \in \mathcal{C}(b,c)$, $\forall h \in \mathcal{C}(c,d)$.
$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f).$$

Exemples

1) (Set, applications) : $Ob(Set)$: ensembles
$Set(A,B) = \{ f : A \to B,$ applications$\}$

2) (Ab, morphismes de groupes) $Ob(Ab)$: groupes abéliens
$Ab(G,H) = \{ f : G \to H$ morphismes de groupes abéliens $\}$

3) (Top, appli continues) $Ob(Top)$: espaces topologiques
$Top(X,Y) = \{ f : X \to Y,$ continues$\}$

2

4) (Gp, morphismes de groupes) $Ob(Gp)$: groupes
$Gp(G,H) = \{ f : G \to H \text{ mor de grp} \}$

5) R un anneau. R Mod : la catégorie des R-modules à gauche, Mod R celle des R-modules à droite. Morphismes : morphismes de R-modules.

<u>Rappel</u> : $R = \mathbb{Z}$ $\mathbb{Z}$-modules = grp abéliens.
$R = k$ corps k-modules = k-espace vectoriel.

<u>Déf</u> Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. La catégorie opposée $\mathcal{C}^{op}$ est la catégorie définie par
$Ob(\mathcal{C}^{op}) = Ob(\mathcal{C})$
$\mathcal{C}^{op}(a,b) = \mathcal{C}(b,a)$
Composition $a \xleftarrow{f} b \xleftarrow{g} c$, $\underleftarrow{\quad g \circ f \quad}$

<u>Déf</u> Soient $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ deux catégories. Un foncteur $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ est la donnée
a) d'objets $F(c) \in Ob(\mathcal{D})$, $\forall c \in Ob(\mathcal{C})$
b) de morphismes $F(f) \in \mathcal{D}(F(a), F(b))$, $\forall a, b \in Ob(\mathcal{C})$ pour tout $f \in \mathcal{C}(a,b)$ tq

1) $F(1_c) = 1_{F(c)}$
2) $\forall f \in \mathcal{C}(a,b)$, $g \in \mathcal{C}(b,c)$

$$F(g) \circ F(f) = F(g \circ f).$$

Déf un foncteur contravariant entre $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ est un foncteur $G : \mathcal{C}^{op} \to \mathcal{D}$

en particulier $\forall a,b,c \in Ob(\mathcal{C})$ $\forall f \in \mathcal{C}(a,b), g \in \mathcal{C}(b,c)$

$G(g \circ f) = G(f) \circ G(g)$.

Prop Soient $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, $G : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ deux foncteurs

la composée $G \circ F : \mathcal{C} \to \mathcal{E}$ donnée par

$a \in Ob(\mathcal{C})$ $(G \circ F)(a) = G(F(a))$

$f \in \mathcal{C}(a,b)$ $(G \circ F)(f) = G(F(f))$ est un foncteur.

Dém : exo.

Exemples 1) X espace topologique ; $\pi_0(X)$, l'ensemble des composantes connexes par arcs de X fournit un foncteur

$$\begin{aligned} \pi_0 : \mathrm{Top} &\to \mathrm{Set} \\ X &\mapsto \pi_0(X) \\ X \to Y &\mapsto \pi_0(X) \to \pi_0(Y) \end{aligned}$$

2) Espaces Top pointés noté Top_* : objet (X, x_0)

X espace topologique $x_0 \in X$.

morphismes $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$: $f : X \to Y$ continue

tq $f(x_0) = y_0$.

Foncteur $\pi_1 : \mathrm{Top}_* \to \mathrm{Grp}$

$$\begin{aligned} (X, x_0) &\mapsto \pi_1(X, x_0) \\ f : (X, x_0) \to (Y, y_0) &\mapsto \pi_1(X, x_0) \xrightarrow{\pi_1(f)} \pi_1(Y, y_0). \end{aligned}$$

3) Le groupe abélien libre $\mathbb{Z}[S]$ engendré par un ensemble S est une construction fonctorielle

$$\mathbb{Z}[-] : \mathcal{E}ns \to \mathcal{A}b$$
$$S \mapsto \mathbb{Z}[S]$$
$$f : S \to T \mapsto \mathbb{Z}[f] : \mathbb{Z}[S] \to \mathbb{Z}[T]$$
$$\sum n_s e_s \mapsto \sum n_s e_{f(s)} .$$

4) Plus généralement, si R est un anneau commutatif, le R-module libre $R[-] : \mathcal{E}ns \to {}_R\mathcal{M}od$

$$S \mapsto R[S]$$
$$f : S \to T \mapsto R[f] : R[S] \to R[T]$$

$$R[S] = \Big\{ \sum_{s \in S' \text{ fini}} r_s e_s ,\ r_s \in R \Big\} .$$

5) Soit $\mathcal{C}$ une catégorie et c un objet de $\mathcal{C}$

$$\mathcal{C}(c,-) \quad \mathcal{C} \to \mathcal{S}et$$
$$d \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(c,d)$$
$$f : d \to d' \mapsto f_* : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(c,d) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(c,d')$$
$$\varphi \mapsto f\varphi$$

est un foncteur covariant

$$\mathcal{C}(-,c) : \mathcal{C} \to \mathcal{S}et$$
$$d \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(d,c)$$
$$f : d \to d' \mapsto f^* : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(d',c) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(d,c)$$
$$\varphi \mapsto \varphi f$$

est un foncteur contravariant.

Déf Soient $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ deux foncteurs. Une transformation naturelle $\eta : F \Rightarrow G$ est la donnée d'un morphisme $\eta_a : Fa \to Ga$ de $\mathcal{D}$ pour tout $a \in Ob(\mathcal{C})$ vérifiant la propriété suivante : $\forall a, b \in Ob(\mathcal{C})$, $\forall f \in \mathcal{C}(a,b)$ on a

$$\begin{tikzcd} Fa \arrow[r, "\eta_a"] \arrow[d, "Ff"'] & Ga \arrow[d, "Gf"] \\ Fb \arrow[r, "\eta_b"] & Gb \end{tikzcd}$$

Déf Soit $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ deux catégories. On note $Fun(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ la catégorie dont les objets sont les foncteurs de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{D}$ et les morphismes $Hom_{Fun(\mathcal{C},\mathcal{D})}(F,G)$ sont les transfo naturelles ...

Note : vérifier que cela forme une catégorie

Ex : Soit $f : c \to c'$, $Hom_{\mathcal{C}}(f, -) : Hom_{\mathcal{C}}(c', -) \to Hom_{\mathcal{C}}(c, -)$

définit une transformation naturelle de foncteurs à savoir

. pour tout objet d

$$Hom_{\mathcal{C}}(f,d) = \text{"}\tau_d : Hom_{\mathcal{C}}(c',d) \to Hom_{\mathcal{C}}(c,d)$$
$$\alpha \mapsto \alpha \circ f$$

vérifie $\forall g : d \to d'$

$$\begin{tikzcd} Hom_{\mathcal{C}}(c',d) \arrow[r, "\tau_d = f^*"] \arrow[d, "g_*"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & Hom_{\mathcal{C}}(c,d) \arrow[d, "g_*"] \\ Hom_{\mathcal{C}}(c',d') \arrow[r, "\tau_{d'} = f^*"'] & Hom_{\mathcal{C}}(c,d') \end{tikzcd}$$

[à vérifier chez soi : $\alpha \in Hom_{\mathcal{C}}(c',d) \mapsto g\alpha f$

6

Rem Notation on a $(gh)_* = g_* h_*$ $(fe)^* = e^* f^*$

1.2 – Foncteurs adjoints

Def Deux foncteurs $L : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, $R : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ sont dits *adjoints* s'il existe pour tous $X \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})$ et $Y \in \mathrm{ob}(\mathcal{D})$ une bijection $\varphi_{X,Y} : \mathcal{D}(LX, Y) \simeq \mathcal{C}(X, RY)$, naturelle en X, Y à savoir
$\forall f \in \mathcal{C}(X, X')$, $\forall g \in \mathcal{D}(Y, Y')$ on a

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}(LX, Y) & \xrightarrow{\varphi_{X,Y}} & \mathcal{C}(X, RY) \\ {\scriptstyle (Lf)^*}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle f^*} \\ \mathcal{D}(LX', Y) & \xrightarrow[\varphi_{X',Y}]{} & \mathcal{C}(X', RY) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathcal{D}(LX, Y) & \xrightarrow{\varphi_{X,Y}} & \mathcal{C}(X, RY) \\ {\scriptstyle g_*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (Rg)_*} \\ \mathcal{D}(LX, Y') & \xrightarrow[\varphi_{X,Y'}]{} & \mathcal{C}(X, RY') \end{array}$$

L est appelé *adjoint à gauche* de R et R est l'adjoint à *droite* de L.
via l'adjonction on a des morphismes particuliers
l'unité de l'adjonction : $\eta_X : X \to RLX$ dans $\mathcal{C}$
obtenu via $\varphi_{(X,LX)} : \mathcal{D}(LX, LX) \to \mathcal{C}(X, RLX)$

$$\mathrm{id}_{LX} \mapsto \eta_X$$

la counité de l'adjonction : $\varepsilon_Y : LRY \to Y$ dans $\mathcal{D}$

obtenu via $\varphi_{(RY,Y)}$ $\mathcal{D}(LRY, Y) \to \mathcal{C}(RY, RY)$

$$\varepsilon_Y \mapsto \mathrm{id}_{RY}$$

Prop $\eta : \mathrm{Id}_{\mathcal{C}} \Rightarrow RL$ et $\varepsilon : LR \Rightarrow \mathrm{id}_{\mathcal{D}}$ sont des transformations naturelles de foncteurs. De plus

$$\varphi_{X,Y} : \mathcal{D}(LX, Y) \to \mathcal{C}(X, RY)$$
$$f \mapsto X \xrightarrow{\eta_X} RLX \xrightarrow{Rf} RY$$

et $\varphi^{-1}_{X,Y}$:
$$\mathcal{C}(X, RY) \to \mathcal{D}(LX, Y)$$
$$g \mapsto LX \xrightarrow{Lg} LRY \xrightarrow{\varepsilon_Y} Y$$

Dém exo.

Ex Les foncteurs oublis : $\mathcal{A}b \to \mathcal{S}et$, $R\text{-Mod} \to \mathcal{S}et$ sont adjoints à droite des foncteurs libres $R[-]$, $\mathbb{Z}[-]$.

B - Propriétés universelles

Déf Soit $\mathcal{C}$ une catégorie, $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$.
La somme de X et Y est la donnée
a) d'un objet $S \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$
b) de deux morphismes $i_X \in \mathcal{C}(X, S)$ et $i_Y \in \mathcal{C}(Y, S)$
vérifiant la propriété universelle suivante :
Pour tout $Z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ et tout $f_X \in \mathcal{C}(X, Z)$ et $f_Y \in \mathcal{C}(Y, Z)$ il existe un unique $f \in \mathcal{C}(S, Z)$ tq $f \circ i_X = f_X$ et $f \circ i_Y = f_Y$.

On note $S = X \sqcup Y$ (appelé aussi coproduit)

On retient le diagramme

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i_X"] \arrow[dr, "f_X"'] & X \sqcup Y \arrow[d, dashed, "\exists! f"] & Y \arrow[l, "i_Y"'] \arrow[dl, "f_Y"] \\ & Z & \end{tikzcd}$$

Rem/ Ex) Si la somme existe elle est unique à isomorphisme près i.e
si S_1, S_2 sont deux sommes alors $\exists\, \alpha : S_1 \to S_2$
$\beta : S_2 \to S_1$ tq $\beta\alpha = 1_{S_1}$ et $\alpha\beta = 1_{S_2}$.

Def Soit $\mathcal{C}$ une catégorie, $X, Y \in Ob(\mathcal{C})$
Le produit de X et Y est la donnée
a) d'un objet $P \in Ob(\mathcal{C})$
b) de deux morphismes $\pi_X \in \mathcal{C}(P, X)$ et $\pi_Y \in \mathcal{C}(P, Y)$
Vérifiant la propriété universelle suivante :
Pour tout $Z \in Ob(\mathcal{C})$ et tout $f_X \in \mathcal{C}(Z, X)$ et $f_Y \in \mathcal{C}(Z, Y)$ il existe un unique morphisme $f \in \mathcal{C}(Z, P)$ tq $\pi_X \circ f = f_X$ et $\pi_Y \circ f = f_Y$.

On note $P = X \times Y$

On retient le diagramme

$$\begin{tikzcd} X & X \times Y \arrow[l, "\pi_X"'] \arrow[r, "\pi_Y"] & Y \\ & Z \arrow[ul, "f_X"] \arrow[u, dashed, "\exists! f"] \arrow[ur, "f_Y"'] & \end{tikzcd}$$

Rk Si le produit existe il est unique à isomorphisme près.

Exemples :

1) Dans Set somme et produit existent $A \sqcup B$, $A \times B$

2) Dans Ab la somme = produit = $G\times H$

$G \xrightarrow{i_G} G\times H \xleftarrow{i_H} H$ $\quad i_G(g)=(g,0_H)$ $\quad i_H(h)=(0_G,h)$

vérification :

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "i_G"] \arrow[dr, "f_G"'] & G\times H \arrow[d, "id"] & H \arrow[l, "i_H"'] \arrow[dl, "f_H"] \\ & L & \end{tikzcd}$$

$f((g,h)) = f_G(g) + f_H(h)$

3) Dans Grp le produit est $G\times H$ mais ce n'est plus la somme !! $\quad 0_G \leftrightarrow e_G \quad 0_H \leftrightarrow e_H$

$f((g,h)) = f_G(g)f_H(h)$

ne vérifie plus $f(g,h)\times f(g',h') = f((gg',hh'))$!!

$= f_G(g)\,f_H(h)\,f_G(g')\,f_H(h')$ $\quad f_G(g)f_G(g')f_H(h)f_H(h')$

la somme de deux groupes est le produit libre (voir le théorème de Van Kampen).

2) Dans Top ______ $X\sqcup Y$, $X\times Y$

avec la topologie finale pour $X\sqcup Y$ par rapport aux applications $X\to$ et $Y\to X\sqcup Y$ et la topologie initiale sur $X\times Y$ % projections

Plus généralement, on peut introduire la notion de limites ou de colimites :

Déf Soit I une catégorie et $F: I\to \mathcal{C}$

une colimite de F sur I (ou limite directe) est un objet c de $\mathcal{C}$, muni de morphismes $\alpha_i : Fi \to c$ vérifiant

a) pour tout $f\in Hom_I(i,j)$ le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} Fi \arrow[d, "Ff"'] \arrow[r, "\alpha_i"] & c \\ Fj \arrow[ur, "\alpha_j"'] & \end{tikzcd} \qquad (*)$$

b) Pour tout objet d de $\mathcal{C}$ et tout système de morphismes $\beta_i : F_i \to d$ vérifiant $(*)$, il existe un unique morphisme $c \to d$ tq $g \circ \alpha_i = \beta_i$.
On note alors $c = \varinjlim_I F = \operatorname{colim}_I F$

Rk Si c existe alors il est unique à isomorphisme près.

Rk On peut exprimer aussi $\operatorname{colim}_I F$ via une ppté universelle à savoir.
Si $d \in Ob(\mathcal{C})$ on construit le foncteur constant
$\Delta d : I \to \mathcal{C}$
$i \mapsto d$
$i \xrightarrow{f} j \mapsto d \xrightarrow{id} d$

On a alors $\operatorname{Nat}(F, \Delta d) \overset{bij}{\simeq} \mathcal{C}(\operatorname{colim}_I F, d)$

$\operatorname{colim} : \underbrace{\operatorname{Fun}(I, \mathcal{C})}_{\text{cat morphismes sont les transf naturelles}} \longrightarrow \mathcal{C} : \Delta$

La colim est un adjoint à gauche de Δ.

→ Définition de limite : adjoint à droite de Δ.

Ex 1) $Ob\, I = \{a, b\}$. Seuls morphismes id_a, id_b

Se donner un foncteur $F : I \to \mathcal{C}$ revient à se donner X, Y deux objets de $\mathcal{C}$.
$\operatorname{colim}_I F = X \sqcup Y$. $\lim_I F = X \times Y$.

2) I : $\begin{tikzcd} a \arrow[r] \arrow[d] & b \\ c & \end{tikzcd}$ se donner un foncteur de $I \to \mathcal{C}$

équivaut à se donner $\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d] & Y \\ Z & \end{tikzcd}$ et $\operatorname{colim}_I F$

est la donnée (s'il existe) de $V \in Ob(\mathcal{C})$ tq

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[d] \arrow[ddr, bend left] & \\ Z \arrow[r] \arrow[drr, bend right] & V \arrow[dr, dotted, "\exists !"] & \\ & & W \end{tikzcd}$$

somme amalgamée
[pushout]

Si I : $\begin{tikzcd} & b \arrow[d] \\ a \arrow[r] & c \end{tikzcd}$ $\lim_I F$ s'appelle produit fibré.
[pullback].

<u>Ex</u> dans Top produit fibré existe

$$\begin{tikzcd} & X_2 \arrow[d, "g"] \\ X_1 \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

c'est l'espace $Z \subset X_1 \times X_2$
des couples $\{(\alpha, \beta)\}$ vérifiant
$f(\alpha) = g(\beta)$.

<u>Rem</u> Les foncteurs adjoints à gauche préservent les colimites et adjoints à droite les limites.