2- Complexe de chaines

21- Définitions

Déf Un complexe de chaines de R-module est la donnée d'une famille de R-modules $(C_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ et de morphismes de R-module $d_n : C_n \to C_{n-1}$ vérifiant $\forall n \geq 1$ $d_n d_{n-1} = 0$. Notation : (C_*, d) ou C

Rem On a toujours $\mathrm{Im}\, d_n \subset \mathrm{Ker}\, d_{n-1}$

Soient (C_*, d^C) et (D_*, d^D). Un morphisme de complexes de chaines $f : C \to D$ est la donnée de morphismes de R-module $f : C_n \to D_n$, $\forall n \in \mathbb{Z}$ tq $\forall n \geq 1$ $d_n^D f_n = f_{n-1} d_n^C$

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & C_n \arrow[r, "d_n^C"] \arrow[d, "f_n"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & C_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{n-1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & D_n \arrow[r, "d_n^D"] & D_{n-1} \arrow[r] &
\end{tikzcd}$$

Notation : $Ch(R)$ la catégorie des complexes de chaines.

Note : souvent on considèrera des complexes de chaine gradués sur $\mathbb{N}$, à savoir $C_n = 0$ $n<0$. On notera $Ch(R)_{\geq 0}$ s'il y a besoin de précision.

Cas particulier Gr_R : catégorie de R-modules gradués.

Objets : $(C_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ familles de R-module

Morphismes : $f : C \to D$ collection $f_n : C_n \to D_n$, $n \in \mathbb{Z}$ morphismes de R-module.

[Cas particulier ~~de~~ complexe de chaines avec $d_n^C = 0$ $\forall n \geq 1$]

Déf : Soit C un complexe de chaînes, avec $d_n : C_n \to C_{n-1}$.
Le noyau de d_n est le R-module des n-cycles ; il est noté $Z_n(C)$ ou Z.
L'image de d_{n+1} est le R-module des n-bords ; il est noté $B_n(C)$ ou B.
On a toujours $B_n \subseteq Z_n \subseteq C_n$.
Le n-ième module d'homologie est noté $H_n(C)$ et est défini par $H_n(C) = Z_n / B_n$.

Prop Soit $f : C \to D$ un morphisme de cx de chaînes.
On a
$$f(Z_n(C)) \subset Z_n(D)$$
$$f(B_n(C)) \subset B_n(D)$$

Ainsi f définit une application $H(f) : H(C) \to H(D)$ qui à $[x] \in H_n(C)$ associe $[f_n(x)] \in H_n(D)$
autrement dit :
$$\begin{aligned} H : \ & Ch(R) \to gr(R) \\ & C \mapsto H(C) \\ f : C \to D & \mapsto H(f) \end{aligned}$$
est un foncteur covariant.

Dém : Si $x \in Z_n(C)$ alors $d f(x) = f(dx) = 0$
Si $x \in B_n(C)$ alors $x = dy$ et $f(x) = f(dy) = d f(y)$ □
Si $f : C \to D$ est un morphisme de cx, $[f(x)]$ ne dépend pas du choix d'un représentant de $[x]$ dans $H_n(C)$.
Il est alors clair que $H(id) = id_H$ et $H(f \circ g) = H(f) \circ H(g)$ □

Déf Une séquence de R-modules $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ est exacte en B si $\mathrm{Im} f = \mathrm{Ker}\, g$.

Un complexe de chaînes est exact si la séquence
$C_{n+1} \xrightarrow[d_{n+1}]{} C_n \xrightarrow[d_n]{} C_{n-1}$ est exacte en C_n, $\forall n$.

Un mor de cx de chaîne $f : C \to D$ est un
quasi-isomorphisme si $H(f) : H(C) \to H(D)$ est un
isomorphisme.

Prop Les propositions suivantes sont équivalentes :
1) C est un complexe de chaînes exact
2) $\forall n \quad H_n(C) = 0$ [on dit que C est acyclique]
3) $0 \to C$ est un quasi-isomorphisme.

Dém : évident.

22. Un peu de catégorie abélienne

Def A une catégorie est appelée Ab-cat (pré-additive)
si $\forall a, b$ objets de A $\quad A(a,b)$ est un gpe
abélien et la composition est bilinéaire.

Ex $Ch(R)$, Ab. Idée : on peut additionner
les morphismes et $0 \in A(a,b)$.

Un foncteur additif entre deux Ab-cat est
un foncteur $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ tq $F(f+g) = F(f) + F(g)$
ie $\forall a,b \quad \mathcal{C}(a,b) \to \mathcal{D}(Fa, Fb)$ est un mor de
$\qquad f \mapsto F(f) \qquad$ groupe.

Déf une catégorie additive $\mathcal{A}$ est une Ab-catégorie ayant un objet nul et un produit $a \times b$ pour toute paire d'objets a, b de $\mathcal{A}$.

On peut remarquer qu'avec cette déf tout couple d'obj admet un biproduit c :

$$a \underset{p_1}{\overset{i_1}{\leftrightarrows}} c \underset{p_2}{\overset{i_2}{\leftrightarrows}} b \quad \text{tq} \quad \begin{aligned} p_1 i_1 &= id_a \\ p_2 i_2 &= id_b \\ i_1 p_1 + i_2 p_2 &= id_c \end{aligned}$$

[aussi appelé somme directe]
et que c est isomorphe à $a \times b$ et à $a \sqcup b$
(noté aussi $a \oplus b$) (cf HS p75/76)

déf Soit $\mathcal{A}$ une catégorie additive.

un noyau de $f : B \to C$ est un morphisme $i : A \to B$ tq $fi = 0$ et tel que i est universel % à cette propriété : $\forall j : A' \to B$ tq $fj = 0$ $\exists !$ $k : A' \to A$ tq $ik = j$.
Conoyau de f morphisme $e : C \to D$ tq $ef = 0$ et universel % cette propriété.

<u>Rappel</u> Ab-catégorie $i : A \to B$ monomorphisme si $if = ig$ $\Rightarrow f = g$ $\Leftrightarrow$ $if = 0 \Rightarrow f = 0$
épi $fi = gi \Rightarrow f = g$ $\Leftrightarrow$ $fi = 0 \Rightarrow f = 0$.

Remarque $f : A \to B$ on a $\operatorname{Ker} f = \lim \left(A \to B \leftarrow 0 \right)$
et $\operatorname{Coker} f = \operatorname{colim} \left(\begin{smallmatrix} A & \to & B \\ \downarrow & & \\ 0 & & \end{smallmatrix} \right)$

Si les noyaux et conoyaux existent, on définit
$\mathrm{Im}(f) = \ker(\mathrm{coker}\, f)$

Déf : Une *catégorie abélienne* est une catégorie additive dans laquelle

1) Tout morphisme admet un noyau et un conoyau
2) Tout monomorphisme est le noyau de son conoyau
$A \xrightarrow{i} B \xrightarrow[\mathrm{coker}\, i]{} C$
$\ker(\mathrm{coker}\, i)$
3) Tout épi est le conoyau de son noyau
$A \xrightarrow[\ker g]{} B \xrightarrow{g} C$
$\mathrm{coker}(\ker g)$

Ex $R\mathrm{Mod}$, $\mathrm{Mod}R$, $\mathrm{Ch}(R)$

Note On peut alors définir suites exactes courtes, $\mathrm{Ch}(A)$...
En particulier $0 \to A \to B \to C \to 0$ est une suite *exacte courte* de complexes ssi $\forall n$ $0 \to A_n \to B_n \to C_n \to 0$ est une suite exacte courte de R-module.

Déf Un foncteur additif $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ où $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont des catégories abéliennes est *exact* si il préserve les suites exactes courtes.
[$\iff$ préserve suites exactes
$\iff$ préserve noyaux et conoyaux]

F covariant est **exact à gauche** si $0 \to A \to B \to C$ exact $\Rightarrow$ $0 \to FA \to FB \to FC$ exact
[$\Leftrightarrow$ $F(\ker f) \cong \ker Ff$], F est **exact à droite** si $A \to B \to C \to 0$ exacte $\Rightarrow$ $FA \to FB \to FC \to 0$ exact
[$\Leftrightarrow$ $F(\mathrm{coker} f) \simeq \mathrm{coker} F(f)$].

F contravariant est **exact à gauche** (resp **exact à droite**) si $F: \mathcal{A}^{op} \to \mathcal{B}$ l'est.
en particulier : $\forall$ $A \to B \to C \to 0$ exact
$0 \to F(C) \to F(B) \to F(A)$ exact.

<u>Ex</u> $\mathrm{Hom}_R(M,-)$ et $\mathrm{Hom}_R(-,M)$ sont exacts à gauche.

Pas à droite — ~~les~~ Foncteurs dérivé permettent de "quantifier" le défaut à l'exactitude de foncteurs additifs.

23 - Objets projectifs - Objets injectifs

Déf Soit $\mathcal{C}$ une catégorie.
P un objet de $\mathcal{C}$ est dit **projectif** si pour tout diagramme

$$\begin{array}{ccc} & & P \\ & & \downarrow \varphi \\ A & \xrightarrow{\varepsilon} & B \end{array}$$

avec ε épimorphisme

il existe $\psi : P \to A$ tq $\varepsilon\psi = \varphi$.

J est dit **injectif** si pour tout diagramme

$$\begin{array}{ccc} A & \xhookrightarrow{\iota} & B \\ & & \downarrow \varphi \\ & & J \end{array}$$

avec ι monomorphisme
il existe $\psi : A \to J$
tq $\psi\iota = \varphi$.

autrement dit J est projectif dans $\mathcal{C}^{op}$.

Rem : dans Set tous les objets sont projectifs et injectifs.

Cas particulier des catégories abéliennes.

Prop P est projectif $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P,-)$ est exact
I ——— injectif $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,I)$ est exact.

Dém : exo

Cas particulier des R-modules.

Prop un R-module est projectif $\Leftrightarrow$ facteur direct d'un module libre.

Dém : Par la propriété d'adjonction $R[-] : \mathrm{Set} \rightleftarrows R\text{-mod} : U$
la counité de l'adjonction $R[U(M)] \xrightarrow[\varepsilon_M]{} M$ admet une section si M projectif. Réciproquement : si M est facteur direct $R[S]$ ie $0 \to M \overset{i}{\hookrightarrow} R[S] \to R[S]/M \to 0$ admet une section σ.

Alors

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, two heads, "\varepsilon"] & B \\
& M \arrow[ul, "\tilde{\psi}"'] \arrow[u, "\varphi"'] \\
& R[S] \arrow[u, "\sigma"'] \arrow[uul, "\psi"]
\end{tikzcd}$$

$\exists\, \psi$ tq $\varepsilon\psi = \varphi\sigma$
on pose $\tilde{\psi} = \psi i$
$\Rightarrow \varepsilon\tilde{\psi} = \varepsilon\psi i = \varphi\sigma i = \varphi$ $\boxtimes$

Remarque Si R est un anneau principal tout sous-module d'un R-module libre est libre
$\Rightarrow$ les projectifs sont les modules libres.

Pas vrai dans d'autres anneaux

ex $R = R_1 \times R_2$ $\quad P_1 = R_1 \times 0$ sont projectifs
$P_2 = 0 \times R_2$

car $R = P_1 \oplus P_2$ mais ils ne sont pas libres

[on a $(0,1) \cdot p = 0 \quad \forall p \in P_1$.

Rem : la catégorie des grs abéliens finis n'admet pas d'objets projectifs non triviaux. [pas traité en cours]

Déf On dit qu'une catégorie $\mathcal{C}$ a assez de projectifs si pour tout objet A il existe P projectif et un épi $P \to A$.

[assez d'injectifs : traduire dans la catégorie opposée] . [pas traité en cours]

24 - Suite exacte longue associée à une suite exacte courte de complexes.

Thm Toute suite exacte courte $0 \to A \to B \to C \to 0$ de complexes de chaînes de R-modules induit une suite exacte longue en homologie

$$\to H_n(A) \to H_n(B) \to H_n(C) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(A) \to H_{n-1}(B) \to \cdots$$

Dém On va appliquer le lemme du serpent aux suites exactes suivantes

$$\begin{array}{ccccccc} & A_n/d(A_{n+1}) & \to & B_n/d(B_{n+1}) & \to & C_n/d(C_{n+1}) & \to 0 \\ & d\downarrow & & d\downarrow & & d\downarrow & \\ 0 \to & Z_{n-1}(A) & \to & Z_{n-1}(B) & \to & Z_{n-1}(C) & \end{array}$$

explications : 1ère ligne correspond à la suite exacte

$$\mathrm{Coker}\, d^A_{n+1} \to \mathrm{Coker}\, d^B_{n+1} \to \mathrm{Coker}\, d^C_{n+1} \to 0$$

car $B_n \to C_n$ est surjective

2ième ligne : $0 \to Z_n(A) \to Z_n(B) \to Z_n(C)$ est exacte car $A_n \to B_n$ est injective.

<u>Rappel</u>

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"] & C \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "f'"] & B' \arrow[r, "g'"] & C' & \end{tikzcd}$$

induit une suite exacte :

$$\ker\alpha \xrightarrow[f]{} \ker\beta \xrightarrow[g]{} \ker\gamma \xrightarrow{D} \mathrm{Coker}\,\alpha \xrightarrow[\bar{f}']{} \mathrm{Coker}\,\beta \xrightarrow[\bar{g}']{} \mathrm{Coker}\,\gamma$$

$f|_{\ker\alpha}$ inj si f inj et $\bar{g}'$ surj si g' surjective.

Par conséquent on a une suite exacte induite par

$$\begin{tikzcd} & A_n/d(A_{n+1}) \arrow[r] \arrow[d, "d"] & B_n/d(B_{n+1}) \arrow[r] \arrow[d, "d"] & C_n/d(C_{n+1}) \arrow[r] \arrow[d, "d"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & Z_{n-1}(A) \arrow[r] & Z_{n-1}(B) \arrow[r] & Z_{n-1}(C) & \end{tikzcd}$$

Mais $\ker\left(A_n/d(A_{n+1}) \xrightarrow{d} Z_{n-1}(A)\right) = H_n(A)$

et $\mathrm{Coker}\left(A_n/d(A_{n+1}) \xrightarrow{d} Z_{n-1}(A)\right) = H_{n-1}(A)$

donc $H_n(A) \to H_n(B) \to H_n(C) \xrightarrow{\delta} H_{n-1}(A) \to H_{n-1}(B) \to \dots$ est exacte $\boxtimes$

Rem le morphisme connectant est induit par d :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A_n \arrow[r, "f"] \arrow[d, "d^A"] & B_n \arrow[r, "g"] \arrow[d, "d^B"] & C_n \arrow[r] \arrow[d, "d^C"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A_{n-1} \arrow[r, "f"] & B_{n-1} \arrow[r, "g"] & C_{n-1} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Soit $[x] \in H_n(C)$, $x \in Z_n(C)$ $\exists\, y \in B_n$ $g(y) = x$ et $d^B y = f(a)$. $\Rightarrow \partial[x] = [a]$.

en effet : $g d^B y = d^C g y = d^C x = 0 \Rightarrow d^B y = f(a)$
et $f(d^A a) = d^B f a = d^B d^B y = 0$ + f inj $\Rightarrow$ $d^A a = 0$.

Corollaire Soit $0 \to A_* \to B_* \to C_* \to 0$ une suite exacte courte de complexes de chaîne. Si 2 parmi les 3 complexes sont exacts, le 3ième l'est aussi.

Dém La suite exacte courte induit une suite exacte longue d'homologie. Si A et B sont exacts alors

$0 \to H_n(C) \xrightarrow{\partial} 0$ exacte $\Rightarrow \operatorname{Ker} \partial = H_n(C)$
$H_n(g)$ $= \operatorname{Im} H_n(g) = 0$

même chose pour les deux autres cas $\boxtimes$

Prop (fonctorialité) Soit

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A_* \arrow[r] \arrow[d, "\varphi A"] & B_* \arrow[r] \arrow[d, "\varphi B"] & C_* \arrow[r] \arrow[d, "\varphi C"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A'_* \arrow[r] & B'_* \arrow[r] & C'_* \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

un morphisme de suite exacte courte $\Rightarrow$ morphisme de suite exactes longues.

Dém La seule chose à démontrer est la commutativité au niveau du morphisme connectant :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A_n \arrow[r] \arrow[d] & B_n \arrow[r] \arrow[d] & C_n \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A_{n-1} \arrow[r] & B_{n-1} \arrow[r] & C_{n-1} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}
\xrightarrow{\varphi}
\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A'_n \arrow[r] \arrow[d] & B'_n \arrow[r] \arrow[d] & C'_n \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A'_{n-1} \arrow[r] & B'_{n-1} \arrow[r] & C'_{n-1} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

y x z 0

induit
$$\begin{tikzcd} H_n(C) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "H_n(\varphi^C)"] & H_{n-1}(A) \arrow[d, "H_{n-1}(\varphi^A)"] \\ H_n(C') \arrow[r, "\partial"] & H_{n-1}(A') \end{tikzcd}$$

Soit $x \in Z_n(C)$. $\partial([x]) = [z]$

On a $x' = \varphi^C(x) \in Z_n(C')$ et $g'(\varphi^B y) = \varphi^C(g(y)) = x'$.
et $f'(\varphi^A(z)) = \varphi^B f(z) = \varphi^B d^B y = d^B \varphi^B y = d^B y' \Rightarrow \partial(x') = [\varphi^A z]$ $\boxtimes$

Prop (Application du Lemme des 5) Soit
$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A_* \arrow[r] \arrow[d, "\varphi^A"] & B_* \arrow[r] \arrow[d, "\varphi^B"] & C_* \arrow[r] \arrow[d, "\varphi^C"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A'_* \arrow[r] & B'_* \arrow[r] & C'_* \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$
un morphisme de sec de complexes. Si 2 des 3 morphismes $\varphi^A, \varphi^B, \varphi^C$ st un quasi-iso, le 3ème l'est aussi.

2.5- Homotopie

Déf Deux morphismes $f, g : K_* \to L_*$ de complexe de chaines sont dits homotopes et on note $f \simeq g$ s'il existe une famille de morphismes de R-modules $h_n : K_n \to L_{n+1}$, $\forall n$ tq

$\forall n \geq 1$, $h_{n-1} d_n^K + d_{n+1}^L h_n = f_n - g_n$

$$\begin{tikzcd} K_{n+1} \arrow[r] \arrow[d] & K_n \arrow[r, "d_n^K"] \arrow[d, "f_n - g_n"] \arrow[dl, "h_n"'] & K_{n-1} \arrow[d] \arrow[dl, "h_{n-1}"'] \\ L_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}^L"'] & L_n \arrow[r] & L_{n-1} \end{tikzcd}$$

Prop L'homotopie entre complexe de chaines est une relation d'équivalence.

Dém $f \simeq f$ [$h_n = 0$]; $f \simeq g \Rightarrow g \simeq f$ [$h'_n = -h_n$]

$f \simeq g$ et $g \simeq h \Rightarrow f \simeq h$ [$h''_n = h_n + h'_n$] $\boxtimes$

§3

Thm Si $f \simeq g$ alors $H_n(f) = H_n(g)$

Dém Soit $[x] \in H_n(K)$, avec $x \in K_n$ $d_n^K x = 0$
$[f_n x - g_n x] = [d_{n+1}^L h_n(x) + h_{n-1} d_n^K(x)] = [0]$ $\boxtimes$

Déf On dit que $f : K_* \to L_*$ est une équivalence d'homotopie s'il existe $g : L_* \to K_*$ tq $g \circ f \simeq id_{C_*}$ et $g \circ f \simeq id_{D_*}$

Corollaire f équivalence d'homotopie $\Rightarrow \forall n \in \mathbb{Z}$, $H_n(f)$ isomorphisme.

Déf On dit qu'un complexe de chaîne K_* est contractile si $id_{K_*} \simeq 0$.

Prop Si K_* est contractile alors il est acyclique.

Dém On a $H_n(id_{K_*}) = id_{H_n(K_*)} = H_n(0) = 0$.
$\Rightarrow \forall n$ $H_n(K_*) = 0$.

⚠ On n'a pas, en général, la réciproque.

26 - Complexe de cochaîne :

$C = (C^n, d)$ avec $d : C^n \to C^{n+1}$ $\quad d^2 = 0$

cocycles $\mathrm{Ker}\, d = Z^n(C)$ $\quad$ cobord $\mathrm{Im}\, d : C^{n-1} \to C^n$
noté $B^n(C)$ $\quad$ cohomologie $\quad H^n(C) = Z^n(C) / B^n(C)$

Soit C un complexe de chaînes de R-modules et G un R-module alors

$\left(X^n = \mathrm{Hom}_R(C_n, G), d^* \right)$ $\quad d^* : X^n \to X^{n+1}$

est un complexe de cochaînes de gps abéliens. La cohomologie de $X^\cdot$ s'appelle cohomologie de $C_\cdot$ à coefficients dans G.

Thm : G un R-module $E : 0 \to K \to L \to \Pi \to 0$ une sec de complexes tq $\forall n$ la suite exacte courte de R-modules
$E_n : \; 0 \to K_n \to L_n \to M_n \to 0$ est scindée. $\exists$ SEL :
$$H^m(\Pi, G) \to H^n(L, G) \to H^m(K, G) \xrightarrow{\delta} H^{n+1}(\Pi, G) \to$$

Dém comme la suite exacte est scindée, par TD, $\forall n$
$0 \to \mathrm{Hom}(M_n, G) \to \mathrm{Hom}(L_n, G) \to \mathrm{Hom}(K_n, G) \to 0$ est une suite ex.
puis même dém que le cas classique.

⚠ On n'a pas en général $H^n(C, G) = \mathrm{Hom}_R(H_n C, G)$!!

Extra : un bifoncteur est un foncteur de $\mathcal{C}\times\mathcal{D} \to \mathcal{E}$ où $\mathcal{C},\mathcal{D}$ sont des catégories et $\mathcal{C}\times\mathcal{D}$ est la catégorie produit définie par
$Ob(\mathcal{C}\times\mathcal{D})$: couples (c,d) avec c objet de $\mathcal{C}$ et d objet de $\mathcal{D}$
$Hom_{\mathcal{C}\times\mathcal{D}}((c,d),(c',d')) = Hom_{\mathcal{C}}(c,c') \times Hom_{\mathcal{D}}(d,d')$.

Thm Soit $R : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ un foncteur. Si R possède un adjoint à gauche, alors celui-ci est unique à isomorphisme près

Dém Soient L, L' des adjoints à gauche de R.
On note

$$L^* : \mathcal{C}^{op} \times \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{E} \qquad R_* : \mathcal{C}^{op} \times \mathcal{D} \to \mathcal{E}$$
$$(c, d) \mapsto Hom_{\mathcal{D}}(Lc, d) \qquad (c,d) \mapsto Hom_{\mathcal{C}}(c, Rd)$$
$$(f,g) \mapsto Hom_{\mathcal{D}}(Lf, g) \qquad (f,g) \mapsto Hom_{\mathcal{C}}(f, Rg)$$

ce sont des bifoncteurs et par hypothèse il existe
$\varphi : L^* \to R_*$
$\varphi' : (L')^* \to R_*$
transf naturelles qui sont des isomorphismes [inversibles]

Ainsi on a une transf naturelle inversible
$$\tau : L^* \xrightarrow[(\varphi')^{-1}\circ\varphi]{} (L')^*$$
en particulier pour c fixé
$$\tau_c : Hom_{\mathcal{D}}(Lc, -) \to Hom_{\mathcal{D}}(L'c, -)$$
est un élément inversible de
$$Nat(Hom_{\mathcal{D}}(Lc,-), Hom_{\mathcal{D}}(L'c,-)) \underset{bij}{\simeq} Hom_{\mathcal{D}}(L'c, Lc).$$
$$\tau_c \xmapsto[\text{par Yoneda}]{} \alpha_c$$

On obtient ainsi une transf naturelle $\alpha : L' \Rightarrow L$ qui est un iso.

Corollaire Soit $\mathcal{C}$ une catégorie admettant des colimites.
Soit I une petite catégorie.
$F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ adjoint à gauche de R.
$Q : I \to \mathcal{C}$.
$F(\operatorname{colim}_I Q) \underset{\text{iso}}{\simeq} \operatorname{colim}_I (F \circ Q)$.

Dém $\operatorname{colim}_I : \operatorname{Fun}(I, \mathcal{C}) \longrightarrow \mathcal{C}$ est l'adjoint à gauche de Δ. Donc $F \circ \operatorname{colim}_I$ est l'adjoint à gauche de $\Delta \circ R = R \circ \Delta$ et $\operatorname{colim}_I \circ F$ est l'adjoint à gauche de $R \circ \Delta$.
Cqfd $F \circ \operatorname{colim}_I \simeq \operatorname{colim}_I \circ F$ $\boxtimes$