Chap 1 ③ - Produit tensoriel

31- Définitions :

R, S sont des anneaux non nécessairement commutatifs.

Déf un R-S-bimodule M est un R-module à gauche, un S-module satisfaisant à la propriété suivante :
$\forall r \in R, \forall s \in S, \forall m \in M \quad (r \cdot m) \cdot s = r \cdot (m \cdot s)$

Déf Soit $M \in \mathrm{Mod}_R$ et $N \in {}_R\mathrm{Mod}$ et G un groupe abélien. Une application
$f : M \times N \to G$ est dite quasi-bilinéaire si

$$\begin{cases} f(m+m', n) = f(m,n) + f(m',n) \\ f(m, n+n') = f(m,n) + f(m,n') \\ f(m \cdot r, n) = f(m, r \cdot n) \end{cases}$$

$\forall m, m' \in M, \quad n, n' \in N, \quad r \in R$.

Thm il existe un groupe abélien, noté $M \otimes_R N$ et une application quasi-bilinéaire

$\varphi : M \times N \to M \otimes_R N$ vérifiant la propriété universelle suivante :

Pour tout gp abélien G, pour toute application quasi-bilinéaire $f : M \times N \to G$ il existe un unique morphisme de groupes $\omega : M \otimes_R N \to G$ tq
$f = \omega \varphi$

Rem Si $(M \otimes_R N, \varphi)$ existe alors il est unique à isomorphisme près ie :
Si (L, ψ) vérifie la même propriété universelle on a :

$$\begin{tikzcd} L \arrow[rr, "\alpha"] & & M \otimes_R N \\ & M \times N \arrow[ul, "\psi"] \arrow[ur, "\varphi"'] & \end{tikzcd} \quad \text{et} \quad \begin{tikzcd} M \otimes_R N \arrow[rr, "\beta"] & & L \\ & M \times N \arrow[ul, "\varphi"] \arrow[ur, "\psi"'] & \end{tikzcd}$$

donc $L \xrightarrow{\beta\alpha} L$ est nécessairement l'identité et $\alpha\beta = id \Rightarrow \alpha, \beta$ isomorphes et $\varphi = \psi\beta$ —

<u>Existence</u> (Construction).

Soit $\mathbb{Z}[M \times N]$ le groupe abélien libre engendré par l'ensemble $M \times N$.
<u>rappel</u> : tout élément de ce groupe s'écrit
$\sum \lambda_{(m,n)} (m,n)$ avec $\lambda_{(m,n)}$ presque tous nuls.
Soit $Y(M,N)$ le ss. $\mathbb{Z}$-module de $\mathbb{Z}[M \times N]$ engendré par les éléments de type :
$$(m+m', n) - (m,n) - (m', n)$$
$$(m, n+n') - (m,n) - (m, n')$$
$$(m \cdot r, n) - (m, r \cdot n)$$

<u>Alors</u> $M \otimes_R N = \mathbb{Z}[M \times N] / Y(M,N)$ et φ est la composée
$$M \times N \xhookrightarrow{i} \mathbb{Z}[M \times N] \xrightarrow{\pi} M \otimes_R N$$
$$(m,n) \longmapsto \text{“} m \otimes n \text{”}$$

<u>Dém</u> φ est quasi-bilinéaire [on a tout fait pour ...]
Soit $f : M \times N \to G$ quasi-bilinéaire. Par propriété universelle du groupe abélien libre, il existe un unique morphisme de groupes abéliens $\tilde{f} : \mathbb{Z}[M \times N] \to G$ tq commute

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "f"] \arrow[dr, hook, "i"'] & G \\ & \mathbb{Z}[M \times N] \arrow[u, "\tilde{f}"'] \end{tikzcd}$$

On a $\tilde{f}\left(\sum \lambda_{(m,n)} (m,n)\right) = \sum \lambda_{(m,n)} f(m,n)$

De plus $\tilde{f}$ passe au quotient par $Y(M,N)$. En effet :

$$\tilde{f}\big((m+m',n)-(m,n)-(m,n)\big) = f(m+m',n)-f(m,n)-f(m',n)$$
$$= f(m,n)-f(m,n)+f(m',n)-f(m',n) = 0$$

pour les autres relations c'est la même chose.

Donc $\exists\, \omega : M \otimes_R N \to G$ tq $\omega\varphi = f$.

Mq ω est unique : supposons que l'on ait ω' tq $\omega\varphi = \omega'\varphi = f$, c'est-à-dire $\omega\pi i = \omega'\pi i = f$, ou encore, comme $\tilde{f}$ est l'unique morphisme de groupes tq $\tilde{f} i = f$, $\omega\pi = \omega'\pi = \tilde{f}$.

Mais π est surjective donc $\omega = \omega'$. $\boxtimes$

Écriture ⚠ tout élément de $M \otimes_R N$ s'écrit

$$\sum \lambda_i m_i \otimes n_i \quad \lambda_i \in \mathbb{Z} \quad m_i \in M, n_i \in N$$

Cependant cette écriture n'est pas unique !

exemple : Soit $m_1, m_2 \in M$, $n_1, n_2 \in N$

$$m_1 \otimes n_1 - m_2 \otimes n_2 = (m_1+m_2)\otimes n_1 - m_2 \otimes (n_1 - n_2)$$

Notation : si $R = \mathbb{Z}$, on note souvent $M \otimes N$ à la place de $M \otimes_{\mathbb{Z}} N$.

Si $M \in {}_S\mathrm{Mod}_R$ et $N \in {}_R\mathrm{Mod}_{S'}$ alors $M \otimes_R N \in {}_S\mathrm{Mod}_{S'}$

$\to$ $s\cdot(m\otimes n) = (sm)\otimes n$ à montrer :

$(m\otimes n)\cdot s' = m \otimes n\cdot s'$ ind^t du choix d'un représentant

Cas particulier où R est commutatif

M un R-module à droite est aussi un bimodule

$r\cdot m = mr$ on a alors $(r\cdot m)\cdot r' = mrr' = mr'r = r\cdot(m\cdot r')$

$M \otimes_R N$ est un R-module $r\cdot(m\otimes n) = m\cdot r\otimes n = m\otimes rn$.

Prop $\eta_g : R \otimes N \xrightarrow{\sim} N$ qui à $r \otimes n = 1 \otimes rn$ associe $r \cdot n$
$\eta_d\ M \underset{R}{\otimes} R \xrightarrow{R} M$ qui à $n \otimes r = nr \otimes 1$ associe nr
sont des iso de R-module à gauche (η_g) ou à droite (η_d).

Dém : $R \times N \to N$, $(r,n) \mapsto r \cdot n$ est quasi-bilinéaire donc factorise de manière unique dans Ab $R \underset{R}{\otimes} N \longrightarrow N$
et $N \to R \underset{R}{\otimes} N$, $n \mapsto 1 \otimes n$ est son inverse.
On vérifie que ce sont des morphismes de R-modules $\boxtimes$

3.2 - Le produit tensoriel vu comme adjonction.

Fonctorialité $f : M \to M'$ morphisme dans Mod_R

induit $f \underset{R}{\otimes} N : M \underset{R}{\otimes} N \to M' \underset{R}{\otimes} N$.

__en effet__ : $M \times N \longrightarrow M' \underset{R}{\otimes} N$, $(m,n) \mapsto f(m) \otimes n$ est quasi-bilinéaire

En conclusion on a :

$$- \underset{R}{\otimes} N : Mod_R \longrightarrow Ab \quad \text{est un foncteur}$$
$$M \mapsto M \underset{R}{\otimes} N$$
$$f \mapsto f \underset{R}{\otimes} N$$

On a également $M \underset{R}{\otimes} - : {}_R Mod \to Ab$ aussi
$$N \mapsto M \underset{R}{\otimes} N$$

Prop Si $N \in {}_R Mod$ alors $Hom_{Ab}(N, G)$ [G gpe abélien] est un R-module à droite $(f \cdot r)(n) = f(r \cdot n)$
Si $M \in Mod_R$ alors $Hom_{Ab}(M, G)$ est un R-module à gauche par $(r \cdot f)(m) = f(m \cdot r)$

Dém : ex

Thm 1) Soit $N \in {}_R\mathrm{Mod}$. Le foncteur

$- \otimes_R N : \mathrm{Mod}_R \to \mathrm{Ab}$, $M \mapsto M \otimes_R N$ est adjoint à gauche du foncteur $\mathrm{Ab} \to \mathrm{Mod}_R$, $G \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ab}}(N, G)$

2) $M \in \mathrm{Mod}_R$; le foncteur $M \otimes_R -$ est adjoint à gauche du foncteur
$\mathrm{Ab} \to {}_R\mathrm{Mod}$
$G \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ab}}(M, G)$

Dém On va démontrer que

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ab}}(M \otimes_R N, G) \xrightarrow[\varphi]{} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Mod}_R}(M, \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ab}}(N, G))$$

et $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ab}}(M \otimes_R N, G) \xrightarrow[\psi]{} \mathrm{Hom}_{{}_R\mathrm{Mod}}(N, \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ab}}(M, G))$

sont naturels φ : en M et G ; ψ en N et G
et sont des bijections.

Soit $f : M \otimes_R N \to G$ un morphisme de groupes abéliens

en précomposant par $M \times N \to M \otimes_R N$

On obtient que f définit une application quasi-bilinéaire
$\tilde{f} : M \times N \to G$

On définit alors $\varphi(f) :$ $M \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ab}}(N, G)$
$m \mapsto n \mapsto \tilde{f}(m, n)$.

a) $n \mapsto f(m,n) \in \mathrm{Hom}_{Ab}(N,G)$ [évident]
et $\varphi(f)(m\cdot r) = (\varphi(f)(m))\cdot r$ car

$$\forall n\in N \quad \varphi(f)(m\cdot r)(n) = f(m\cdot r, n) = f(m, r\cdot n)$$
$$= \varphi(f(m,-)\cdot r)(n).$$
$$= [\varphi(f)(m)\cdot r](n)$$

et $\varphi(f)(m+m') = \varphi(f)(m) + \varphi(f)(m')$

b) Réciproquement
$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Mod}_R}(M, \mathrm{Hom}_{Ab}(N,G)) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{Ab}(M\otimes_R N, G)$$
$$\alpha \longmapsto \hat{\alpha}$$

<u>étape 1</u> : On pose $\alpha_1(m,n) = \alpha(m)(n)$. α_1 étant fonc. bilinéaire, elle détermine de manière unique un morphisme de groupes $\hat{\alpha} : M\otimes_R N \to G$.

<u>Il reste à mq</u> : $\widehat{\varphi(f)} = f$ et $\varphi(\hat{\alpha}) = \alpha$ [exo]

c) φ est naturelle en M et G :
Si f est un morphisme de gpe $G \to G'$

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(M\otimes_R N, G) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "f_*"] & \mathrm{Hom}_{\mathrm{Mod}_R}(M, \mathrm{Hom}(N,G)) \arrow[d, "f_*"] \\
\mathrm{Hom}(M\otimes N, G') \arrow[r, "\varphi"] & \mathrm{Hom}_{\mathrm{Mod}_R}(M, \mathrm{Hom}(N,G'))
\end{tikzcd}$$

s'écrit $[(f_*\circ\varphi)(\alpha)](m)(n) = f(\alpha(m\otimes n))$
$$(\varphi\circ f_*)(\alpha)(m)(n) = f(\alpha(m\otimes n))$$

La naturalité en M se montre de la même manière.

Conclusion Les foncteurs $M \otimes_R -$ et $- \otimes_R N$ préservent les colimites.

Ce sont des foncteurs additifs [prop. universelle]
$\Rightarrow$ ils préservent les conoyaux.
Donc ils sont exacts à droite.

Attention : ils ne sont pas nécessairement exacts à gauche !

Déf M un R-module est dit *plat* si le foncteur $M \otimes_R -$ est exact (même dit pour les R-modules à gauche).

Ex La suite exacte $0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to 0$

induit $M \otimes \mathbb{Z} \xrightarrow{\times 2} M \otimes \mathbb{Z} \longrightarrow M \otimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to 0$.
$\simeq M \xrightarrow{\times 2} M \longrightarrow M \otimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to 0$.

Si $M = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ alors $M \xrightarrow{\times 2} M = 0$ donc pas mono !

Ainsi $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ n'est pas un module plat.

Prop Tout module projectif est plat.

Dém idée

Lemme 1 Soient I un ensemble et $(F_i : A \to B)_{i \in I}$ une famille de foncteurs additifs avec A et B abéliennes.

$\bigoplus_{i \in I} F_i$ exact $\Leftrightarrow$ $\forall i$ F_i est exact.

ainsi M_i de R-modules à droite $\bigoplus_{i \in I} M_i$ plat $\Leftrightarrow$ M_i plat.
[on considère les foncteurs additifs $F_i : M_i \otimes_R -$

<u>Lemme 2</u> Tout module libre est plat.

en effet S un ensemble $R[S] = \bigoplus_{s \in S} R[\{s\}] \simeq \bigoplus_{s \in S} R$.

par lemme 1, il suffit donc de mq R est plat.
Mais le foncteur $\begin{array}{ccc} {}_R\mathrm{Mod} & \longrightarrow & Ab \\ N & \mapsto & R \otimes_R N \end{array}$ est le foncteur oubli.
Si $0 \to N_1 \to N_2 \to N_3 \to 0$ est une suite exacte dans ${}_R\mathrm{Mod}$, alors c'est une suite exacte dans Ab. Donc le foncteur oubli est exact.

Enfin, comme tout module projectif M est facteur direct d'un module libre on a :
$\exists$ S, M_2 tq $\quad M \oplus M_2 = R[S] \Rightarrow M$ plat $\boxtimes$

33- <u>Produit tensoriel de bimodules</u>

Toute la section précédente se généralise aux bimodules en particulier

<u>Thm</u> : Soit $M \in {}_S\mathrm{Mod}_R$, $N \in {}_R\mathrm{Mod}_{S'}$
On a des adjonctions de foncteurs :

$M \otimes_R - : {}_R\mathrm{Mod}_{S'} \longrightarrow {}_S\mathrm{Mod}_{S'} : \mathrm{Hom}_{{}_S\mathrm{Mod}}(M, -)$

$- \otimes_R N \quad {}_S\mathrm{Mod}_R \longrightarrow {}_S\mathrm{Mod}_{S'} : \mathrm{Hom}_{\mathrm{Mod}_{S'}}(N, -)$

où $\mathrm{Hom}_{S\mathrm{Mod}}(M,N)$ est muni de la structure de (R,S')-bimodule suivante

$(r\cdot f)(m) = f(m\cdot r)$
$(f\cdot s')(m) = f(m)\cdot s'$ on vérifie $((r\cdot f)\cdot s')(m) = f(mr)s'$
$= (r\cdot(f\cdot s'))(m)$ ⊠

On obtient ainsi un bifoncteur :

$$- \underset{R}{\otimes} - : {}_S\mathrm{Mod}_R \times {}_R\mathrm{Mod}_{S'} \longrightarrow {}_S\mathrm{Mod}_{S'}$$
$$(M,N) \mapsto M \underset{R}{\otimes} N$$
$$f,g \mapsto f\otimes g : m\otimes n \mapsto f(m)\otimes f(n).$$

On a donc ${}_S\mathrm{Mod}_R(M,N) \times {}_R\mathrm{Mod}_{S'}(M',N') \longrightarrow {}_S\mathrm{Mod}_{S'}(M\underset{R}{\otimes}N, M'\underset{R}{\otimes}N')$
qui est une application quasi-linéaire entre groupes abéliens :

$(f_1+f_2)\otimes g = f_1\otimes g + f_2\otimes g$
$f\otimes(g_1+g_2) = f\otimes g_1 + f\otimes g_2$

Fournit un morphisme de grps abéliens :

$${}_S\mathrm{Mod}_R(M,M') \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} {}_R\mathrm{Mod}_{S'}(N,N') \longrightarrow {}_S\mathrm{Mod}_{S'}(M\underset{R}{\otimes}N, M'\underset{R}{\otimes}N')$$

Compatible avec la composition :

$$(f_1\otimes g_1)\circ(f_2\otimes g_2) = (f_1\circ f_2 \otimes g_1\circ g_2)$$

Prop Soient S,R,T,U des anneaux $M \in {}_S\mathrm{Mod}_R$, $N \in {}_R\mathrm{Mod}_T$
$P \in {}_T\mathrm{Mod}_U$ — ~~les~~ (S,U)-bimodules

$$(M\underset{R}{\otimes}N)\underset{T}{\otimes}P \quad \text{et} \quad M\underset{R}{\otimes}(N\underset{T}{\otimes}P) \quad \text{sont isomorphes}$$

et cet isomorphisme est naturel en M,N,P —

34 - k-algèbres

Déf Soit k un corps (parfois on prend un anneau commutatif). Une *k-algèbre* A est un k-module muni d'une multiplication $\mu : A \otimes_k A \to A$ et d'une unité $\eta : k \to A$ vérifiant les ppts suivantes

$$\begin{tikzcd} A \otimes_k A \otimes_k A \arrow[r, "1\otimes\mu"] \arrow[d, "\mu\otimes 1"'] \arrow[dr, phantom, "\text{associativité}"] & A \otimes_k A \arrow[d, "\mu"] \\ A \otimes_k A \arrow[r, "\mu"] & A \end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd} A \simeq k \otimes_k A \arrow[r, "\eta\otimes 1"] & A \otimes_k A \arrow[d, "\mu"] \\ A \otimes_k k \arrow[u, phantom, sloped, "\simeq"] \arrow[d, "1\otimes\eta"'] \arrow[r, phantom, "\text{unité}"] \arrow[r, "1_A"] & A \\ A \otimes_k A \arrow[ur, "\mu"'] & \end{tikzcd}$$

Rem cela correspond à la définition usuelle : produit noté $a \cdot b$ bilinéaire et tq $\lambda(a\cdot b) = (\lambda a)\cdot b = a \cdot (\lambda b)$ (quasi-bilinéaire)

Thm Soit A, B deux k-algèbres. Il existe une unique structure de k-algèbre sur $A \otimes_k B$.
La multiplication est donnée par

$$\begin{tikzcd} (A\otimes B)\otimes(A\otimes B) \arrow[r, "1_A\otimes T\otimes 1_B"] \arrow[dr] & A\otimes A\otimes B\otimes B \arrow[d, "\mu_A\otimes\mu_B"] \\ & A\otimes B \end{tikzcd}$$

$(a\otimes b)\cdot(a'\otimes b') = aa' \otimes bb'$.
Les morphismes $A \to A\otimes B$, $a \mapsto a\otimes 1_B$ et $B \to A \otimes B$, $b \mapsto 1\otimes b$ sont des morphismes de k-algèbres.

Thm Le foncteur oubli $k\text{-algs} \xrightarrow{U} k\text{-modules}$ admet un adjoint à gauche $T : {}_k\mathrm{Mod} \to \mathrm{Alg}_k$, $V \mapsto T(V)$

$T(V)$ est appelé *l'algèbre tensorielle* : c'est la k-alg libre engendrée par le k-module V.

Dém Par construction [s'il existe il est unique]

$T(V) = \bigoplus_{k \geq 0} V^{\otimes k}$ [$V^{\otimes 0} := k$] tous les produits tensoriels sont pris sur k.

* On a $V \to T(V)$
* On a $k \to T(V)$
* Le produit est donné par la concaténation :

$$(v_1 \otimes \cdots \otimes v_i) \cdot (w_1 \otimes \cdots \otimes w_j) = v_1 \otimes \cdots \otimes v_i \otimes w_1 \otimes \cdots \otimes w_j .$$

* Soit A une k-alg $f : V \to A$ un morphisme de k-modules, $\exists !$ $\tilde{f} : T(V) \to A$ morphisme de k-algs tq

$$\begin{tikzcd} V \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "i_V"'] & & A \\ & T(V) \arrow[ur, "\tilde{f}"'] & \end{tikzcd}$$

commute

multiplication dans A

$$\tilde{\varphi}(v_1 \otimes \cdots \otimes v_i) = \varphi(v_1) \cdots \varphi(v_i)$$

Variante : Alg symétrique $S(V)$ [alg commutative libre]

$S(V) = \bigoplus_{r \geq 0} S^r(V)$: $S^r(V)$ transforme les applications r-multilinéaires symétriques en morphismes de groupes abéliens

Alg extérieure $E(V) = \bigoplus_{r \geq 0} E^r(V)$ où $E^r(V) = V^{\otimes r} / \langle \underline{v} - \varepsilon(\sigma)\sigma \cdot \underline{v} \rangle$