Université Paris Diderot
Algèbre Homologique et Topologie algébrique **13h30-16h30**
M2 Math

Corrigé de l'examen du 27 octobre 2017

Solution de l'exercice 1

1. Choisissons une section ensembliste s de $E \to G$ et notons $i : A \to E$ l'injection. On rappelle que la structure de G-module sur A est donné par $i(g \cdot a) = s(g)i(a)s(g)^{-1} \in E$ et comme E est abélien on a pour tout $g \in G$ pour tout $a \in A$, $i(g \cdot a) = i(a)$ donc $g \cdot a = a$; la structure est triviale. Ainsi on a une injection $\tilde{\varphi} : E_{\mathcal{A}b}(G; A) \to E_{\mathrm{Gr}}(G; A)$ de l'ensemble des extensions de $\mathbb{Z}$-modules de G par A dans l'ensemble des extensions de groupes de G par A induisant la structure de G-module trivial. Il est clair que cela passe au quotient par les isomorphismes d'où l'existence de φ. De plus, si $\xi, \xi' \in E_{\mathcal{A}b}(G, A)$ vérifient $\tilde{\varphi}(\xi)$ et $\tilde{\varphi}(\xi')$ sont des extensions de groupes isomorphes, alors ξ, ξ' sont des extensions de $\mathbb{Z}$-modules isomorphes. Donc φ est injective.

2. En utilisant la résolution projective du $\mathbb{Z}$-module $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$
$$\mathbb{Z}_{(1)} \overset{\times n}{\to} \mathbb{Z}_{(0)}$$
et en appliqant le foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(-; A)$, on obtient le complexe de cochaines de $\mathbb{Z}$-modules
$$A_{(0)} \overset{\times n}{\to} A_{(1)}$$
ce qui donne $\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, A) = A/nA$, qui est un ensemble fini car A est de type fini.
On rappelle que $H^2(G, A) = \mathrm{Ext}^2_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, A)$. En posant $C_n = \{\omega^i, 0 \leq i \leq n-1\}$ et en utilisant la résolution libre de $\mathbb{Z}$ comme $\mathbb{Z}[C_n]$-module trivial vue en TD
$$\ldots \to \mathbb{Z}[C_n] \overset{\times T}{\to} \mathbb{Z}[C_n] \overset{\times N}{\to} \ldots \to \mathbb{Z}[C_n] \overset{\times T}{\to} \mathbb{Z}[C_n] \overset{\times N}{\to} \mathbb{Z}[C_n]$$
où $T = \sum_{i=0}^{n-1} \omega^i$ et $N = \omega - 1$, et en appliquant le foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[C_n]}(-, A)$ on obtient le complexe suivant
$$A_{(0)} \overset{\times N}{\to} A_{(1)} \overset{\times T}{\to} A_{(2)} \overset{\times N}{\to} A_{(3)} \to \cdots$$
Comme A est un C_n-module trivial, la multiplication par N est nulle et la multiplication par T est la multiplication par n. On en déduit que $H^2(C_n, A) = A/nA$. Donc φ est une injection entre deux ensembles finis de même cardinal c'est donc une bijection.

3. (a) G est considéré comme un $\mathbb{F}_p$-espace vectoriel de dimension 2. Soient u, v, w trois vecteurs de G. La bilinéarité du déterminant implique $\delta_2\mathrm{det}(u, v, w) = \mathrm{det}(v, w) - \mathrm{det}(u + v, w) + \mathrm{det}(u, v + w) - \mathrm{det}(u, v) = 0$, donc det est un 2-cocycle.

   (b) Comme l'application det est anti-symétrique: $\mathrm{det}(u, v) = -\mathrm{det}(v, u)$, comme $p > 2$ on peut trouver deux vecteurs u et v tels que $\mathrm{det}(u, v) \neq \mathrm{det}(v, u)$, ce qui permet de conclure que la loi de groupes sur E_{det} n'est pas commutative. Donc $0 \to A \to E_{\mathrm{det}} \to G \to 0$ est une extension de groupes avec E_{det} non abélien. Rappelons que la loi de groupe est donnée par $(\lambda, v) * (\mu, w) = (\lambda + \mu + \mathrm{det}(v, w), v + w)$ et $i : A \to E_{\mathrm{det}}$ est donné par $i(\lambda) = (\lambda, 0)$ qui commute avec tout élément de E_{det} donc la structure de G-module induite sur A est la structure triviale.

4. (a) On utilise à nouveau la résolution libre de $\mathbb{Z}$ comme $\mathbb{Z}[H]$-module trivial vue en TD
$$\ldots \to \mathbb{Z}[H] \overset{\times T}{\to} \mathbb{Z}[H] \overset{\times N}{\to} \ldots \to \mathbb{Z}[H] \overset{\times T}{\to} \mathbb{Z}[H] \overset{\times N}{\to} \mathbb{Z}[H]$$
Ce qui nous donne en appliquant le foncteur $- \otimes_{\mathbb{Z}[H]} \mathbb{Z}$
$$0 \overset{0}{\to} \mathbb{Z}_{(2)} \overset{\times n}{\to} \mathbb{Z}_{(1)} \overset{0}{\to} \mathbb{Z}_{(0)}$$

Donc $H_0(H;\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}, H_1(H;\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et $H_2(H;Z) = 0$. On utilise alors la suite exacte courte de Künneth. En dimension 1 les seuls groupes apparaissant dans le terme de droite sont $\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z},\mathbb{Z}) = 0$ et en dimensions 2 ce sont $\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z};\mathbb{Z})$ et $\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z},\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ qui sont tous deux nuls. On obtient donc:

$$H_1(G;\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} = G \text{ et } H_2(G;\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} = \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$$

(b) En remplaçant les termes trouvés dans la question précédente dans le théorème des coefficients universels, on obtient la suite exacte courte

$$0 \to \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(G,A) \to H^2(G,A) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}b}(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z},A) \to 0$$

Comme $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}b}(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z},A) = \{a \in A | d\cdot a = 0\} =_d A$ on obtient que $H^2(G;A) = \mathrm{Ext}^1(G;A) \oplus_d A$. Ainsi φ est bijective si et seulement si A n'admet pas d'élément de d torsion non nul. Autrement dit il existe une extension de groupes de G par A, induisant la structure de G-module triviale sur A, avec E non abélien si et seulement si A admet des éléments non nuls de d torsion.

Remarque: si n et m sont premiers entre eux alors $G = C_{n\times m}$ et $d = 1$ on retrouve les résultats de la question 2. Si $n = m = p$ et $A = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ tous les éléments de A sont de p torsion, on retrouve le résultat de la question 3.

5. Voir Weibel Proposition 6.1.13 p165.

Solution de l'exercice 2:

1. La suite exacte courte de complexes de chaines

$$0 \longrightarrow B \oplus C \xrightarrow{\iota_B \oplus \iota_C} \mathrm{Cyl}(f,g) \xrightarrow{\pi_A} A[1] \longrightarrow 0$$

est donnée par $(\iota_B \oplus \iota_C)(b,c) = (b,0,c)$ et $\pi_A(b,a,c) = a$. Pour tout n la suite

$$0 \longrightarrow B_n \oplus C_n \xrightarrow{\iota_B \oplus \iota_C} \mathrm{Cyl}(f,g)_n \xrightarrow{\pi_A} A[1]_n \longrightarrow 0$$

est exacte (π_A est surjective, $\iota_B \oplus \iota_C$ est injective et $\mathrm{Ker}\pi_A = \mathrm{Im}(\iota_B \oplus \iota_C)$) et même scindée. De plus les morphismes π_A et $\iota_B \oplus \iota_C$ sont des morphismes de complexes de chaines, car

$$d\iota_B \oplus \iota_C(b,c) = (db,0,dc) = \iota_B \oplus \iota_C(db,dc) \text{ et } d\pi_A(b,a,c) = -da = \pi_A(db - f(a), -da, dc + g(a)).$$

2. Comme $H_n(B \oplus C) = H_n(B) \oplus H_n(C)$ et $H_n(A[1]) = H_{n-1}(A)$ la suite exacte courte de complexes de chaines précédentes induit une longue suite exacte en homologie

$$\cdots \longrightarrow H_n(A) \xrightarrow{\delta} H_n(B) \oplus H_n(C) \longrightarrow H_n(\mathrm{Cyl}(f,g)) \longrightarrow H_{n-1}(A) \longrightarrow \cdots$$

et il suffit de calculer le morphisme connectant δ. Soit $a \in A_n$ un cycle. Alors $a = \pi_A((0,a,0)$ et $d(0,a,0) = (-f(a), -d_A(a), g(a)) = (-f(a), 0, g(a)) = (\iota_B \oplus \iota_C)(-f(a), g(a))$. Ainsi $\delta([a]) = [-f(a), g(a)]$ ce qui donne le résultat.

3. Posons $\varphi_h : \mathrm{Cyl}(f,g) \to \mathrm{Cyl}(f',g)$ l'application qui à (b,a,c) associe $(b - h(a), a, c)$. Montrons l'égalité $d'\varphi_h = \varphi_h d$. D'une part on a

$$d'\varphi_h = \begin{pmatrix} d^B & -f' & 0 \\ 0 & -d^A & 0 \\ 0 & g & d^C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} id & -h & 0 \\ 0 & id & 0 \\ 0 & 0 & id \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d^B & -d^B h - f' & 0 \\ 0 & -d^A & 0 \\ 0 & g & d^C \end{pmatrix}$$

et d'autre part

$$\varphi_h d = \begin{pmatrix} id & -h & 0 \\ 0 & id & 0 \\ 0 & 0 & id \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d^B & -f & 0 \\ 0 & -d^A & 0 \\ 0 & g & d^C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d^B & -f + hd^A & 0 \\ 0 & -d^A & 0 \\ 0 & g & d^C \end{pmatrix}$$

Or $hd^A - f = -d^B h - f'$, d'où l'égalité. De plus φ_h est un isomorphisme d'inverse φ_{-h}.

4. Considérons l'application $(f, id_A, g) : \mathrm{Cyl}(A) \to \mathrm{Cyl}(f, g)$ qui à (a_-, a, a_+) associe $(f(a-), a, g(a_+))$. On a $(f, id_A, g) \circ i_-(a) = (f(a), 0, 0) = \iota_B f(a)$, $(f, id_A, g) \circ i_-(a) = (0, 0, g(a)) = \iota_C g(a)$ et

$$d(f, id_A, g)(a_-, a, a_+) = (df(a_-) - f(a), -da, dg(a_+) + g(a)) = (f, id_A, g)(da_- - a, -da, da_+ + a)$$

Donc (f, id_A, g) est un morphisme de complexes de chaines qui fait commuter le diagramme suivant:

$$\begin{tikzcd}
 & A \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "i_-"] & & A \arrow[dl, "i_+"'] \arrow[dr, "g"] & \\
B \arrow[drr, "\iota_B"'] & & \mathrm{Cyl}(A) \arrow[d, "{(f,id_A,g)}"'] & & C \arrow[dll, "\iota_C"] \\
 & & \mathrm{Cyl}(f,g) & &
\end{tikzcd}$$

Donc $\mathrm{Cyl}(f, g)$ est un cocone du diagramme de l'exercice.

On suppose donnés $\varphi : B \to Y$, $\psi : C \to Y$ et $\gamma : \mathrm{Cyl}(A) \to Y$ tels que le diagramme (D) suivant commute

$$\begin{tikzcd}
 & A \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "i_-"] & & A \arrow[dl, "i_+"'] \arrow[dr, "g"] & \\
B \arrow[drr, "\varphi"'] & & \mathrm{Cyl}(A) \arrow[d, "\gamma"'] & & C \arrow[dll, "\psi"] \\
 & & Y & &
\end{tikzcd}$$

Montrons qu'il existe un unique $u : \mathrm{Cyl}(f, g) \to Y$ tel que le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd}
 & A \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "i_-"] & & A \arrow[dl, "i_+"'] \arrow[dr, "g"] & \\
B \arrow[drr, "\iota_B"] \arrow[ddrr, "\varphi"'] & & \mathrm{Cyl}(A) \arrow[d, "{(f,id_A,g)}"'] & & C \arrow[dll, "\iota_C"'] \arrow[ddll, "\psi"] \\
 & & \mathrm{Cyl}(f,g) \arrow[d, "u"] & & \\
 & & Y & &
\end{tikzcd}$$

avec $u \circ (f, id_A, g) = \gamma$.

Si u existe on doit avoir $u \circ \iota_B = \varphi, u \circ \iota_c = \psi$ et $u(0, a, 0) = \gamma(0, a, 0)$ donc

$$u(b, a, c) = \varphi(b) + \psi(c) + \gamma((0, a, 0))$$

Montrons que $u \circ (f, id_A, g) = \gamma$: pour $(a_-, a, a_+) \in \mathrm{Cyl}(A)$, on a $u(f(a_-), a, g(a_+)) = \varphi(f(a_-)) + \psi(g(a_+)) + \gamma(0, a, 0) = \gamma(a_-, a, a_+)$. Montrons que u est un morphisme de complexes de chaines: comme φ, ψ et γ sont des morphismes de complexes de chaines, on a: $d^Y u(b, a, c) = \varphi(d^B b) + \psi(d^C c) + \gamma(-a, -d^A a, a)$. Par ailleurs,

$$u(d^B b - f(a), -d^A a, d^C c + g(a)) = \varphi(d^B b) + \psi(d^C c) + \gamma(0, -d^A a, 0) - \varphi f(a) + \psi g(a) = d^Y u(b, a, c).$$

5. Fixons h une homotopie de A dans Y telle que $d^Y h + hd^A = \psi g - \varphi f$. Montrons que $\rho : \mathrm{Cyl}(A) \to Y$ qui à (a_-, a, a_+) associe $\varphi f(a_-) + h(a) + \psi g(a_+)$ est un morphisme de complexes qui fait commuter le diagramme (D).

$$\rho i_-(a) = \varphi f(a),\ \ \rho i_+(a) = \psi g(a)$$

et

$$d^Y \rho(a_-, a, a_+) = \varphi f(da_-) + d^Y h(a) + \psi g(da_+)$$

car φf et ψg sont des morphismes de complexes; comme $d^Y h(a) = -h(d^A a) + \psi g(a) - \varphi f(a)$, on obtient

$$d^Y \rho(a_-, a, a_+) = \varphi f(da_- - a) + \psi g(da_+ + a) + h(-d^A a) = \rho(a_- - f(a), -d^A a, a_+ + g(a)).$$

Par la question précédente on obtient l'existence d'un morphisme de complexes $\gamma : \mathrm{Cyl}(f, g) \to Y$ vérifiant $\gamma \iota_B = \varphi$ et $\gamma \iota_C = \psi$.

6. Réciproquement se donner un morphisme de complexes de chaines $\gamma : \mathrm{Cyl}(f, g) \to Y$ équivaut à se donner pour tout n des applications R-linéaires $\varphi_n = \gamma_n \circ \iota_{B_n} : B_n \to Y_n$, $\psi_n = \gamma_n \circ \iota_{C_n} : C_n \to Y_n$ et $h_n = \gamma_n \circ \iota_{A_{n-1}} : A_{n-1} \to Y_n$. Les applications φ et ψ sont donc des morphismes de complexes de chaines. Il reste à montrer que h est une homotopie entre φf et ψg. Calculons

$$(d^Y h + hd^A)(a) = d^Y \gamma(0, a, 0) + h(da) = \gamma(-f(a), -d^A a, ga) + \gamma(0, d^A a, 0) = -\varphi f(a) + \psi g(a).$$

Solution de l'exercice 3

1. Le complexe cellulaire pour $M(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, 2)$ à coefficients dans $\mathbb{Z}$ est donné par

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_{(3)} \xrightarrow{\times p} \mathbb{Z}_{(2)} \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{Z}_{(0)}$$

Donc

$$H_k(M(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, 2), \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } k = 0, \\ \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} & \text{si } k = 2, \\ 0 & k \neq 0, 2 \end{cases}$$

En appliqaunt le foncteur $- \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ on obtient le complexe à coefficients dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ suivant

$$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}_{(3)} \xrightarrow{0} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}_{(2)} \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}_{(0)}$$

Donc

$$H_k(M(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, 2), \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} & \text{si } k = 0, 2, 3 \\ 0 & k \neq 0, 2, 3 \end{cases}$$

2. (a) Les complexes cellulaires pour les deux espaces sont les mêmes à savoir

$$\mathbb{Z}_{(4)} \xrightarrow{0} \mathbb{Z}_{(3)} \xrightarrow{\times p} \mathbb{Z}_{(2)} \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{Z}_{(0)}$$

Donc

$$H_k(X, \mathbb{Z}) = H_k(Y, \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } k = 0, 4 \\ \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} & \text{si } k = 2, \\ 0 & k \neq 0, 2, 4 \end{cases}$$

a

(b) Les complexes de cochaines à coefficients coincident pour n'importe quel anneau R, à savoir:

$$R_{(0)} \xrightarrow{0} 0 \longrightarrow R_{(2)} \xrightarrow{\times p} R_{(3)} \xrightarrow{0} R_{(4)}$$

ce qui donne

$$H^k(X,\mathbb{Z}) = H^k(Y,\mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } k = 0,4, \\ \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} & \text{si } k = 3, \\ 0 & k \neq 0,3,4 \end{cases}$$

en particulier si α et β sont des éléments de $H^*(X,\mathbb{Z})$ de degré strictement positif, ils sont de degré ≥ 3 et par conséquent $\alpha \cup \beta = 0$ car de degré ≥ 6. Le même raisonnement vaut pour $H^*(Y,\mathbb{Z})$ donc $H^*(X,\mathbb{Z})$ et $H^*(Y,\mathbb{Z})$ sont des algèbres commutatives graduées isomorphes.

3. Si $R = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, on obtient

$$H^k(X,\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) = H^k(Y,\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} & \text{si } k = 0,2,3,4 \\ 0 & \text{si } k = 1 \text{ et } k > 4 \end{cases}$$

Le 2-squelette de X est $\mathbb{C}P^2$ donc on a un morphisme $i : \mathbb{C}P^2 \to X$ et $(X, \mathbb{C}P^2)$ est une bonne paire, donc on obtient un morphisme en complexes de cochaines cellulaires $C^*(X) \to C^*(\mathbb{C}P^2)$ donné par

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}_{(0)} \arrow[r, "0"] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}_{(2)} \arrow[r, "0"] \arrow[d] & \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}_{(3)} \arrow[r, "0"] \arrow[d] & \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}_{(4)} \arrow[d] \\
\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}_{(0)} \arrow[r, "0"] & 0 \arrow[r] & \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}_{(2)} \arrow[r] & 0 \arrow[r, "0"] & \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}_{(4)}
\end{tikzcd}$$

Par conséquent le morphisme induit $i^* : H^*(X) \to H^*(\mathbb{C}P^2)$ est un isomorphisme en dégré 2 et 4, ce qui implique que si α est un générateur de $H^2(X)$ alors $i^*(\alpha \cup \alpha) = i^*(\alpha) \cup i^*(\alpha)$ est un générateur de $H^4(\mathbb{C}P^2)$ et donc $\alpha \cup \alpha$ est un générateur de $H^4(X)$. Il est en particulier non nul.

Par ailleurs d'après le cours $\tilde{H}^*(Y,\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ est isomorphe à $\tilde{H}^*(M(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z},2) \oplus \tilde{H}^*(S^4,\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ et cet isomorphisme préserve les cup-produits. Donc si β est un générateur de $H^2(Y,\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ il correspond via cet isomorphisme à un générateur de $H^2(M(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z},2),\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ noté β' et $\beta' \cup \beta' = 0$ car $H^4(M(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z},2),\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) = 0$. Donc $\beta \cup \beta = 0$.

Par conséquent les deux algèbres commutatives graduées $H^*(X,\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ et $H^*(Y,\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ ne peuvent pas être isomorphes.