Université Paris Diderot
Algèbre Homologique et Topologie algébrique **13h30-16h30**
M2 Math

Examen du 27 octobre 2017

Les téléphones portables sont interdits.

Exercice 1: Dans cet exercice, on fixe A et G deux groupes abéliens. On suppose que A est de type fini.

On note $\mathcal{E}_{\mathcal{A}b}(G;A)$ l'ensemble des classes d'extensions de $\mathbb{Z}$-modules de G par A (modulo les isomorphismes). On rappelle que cet ensemble est en bijection avec $\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(G;A)$.
Si A est muni de la structure de G-module trivial, on note $\mathcal{E}_{\mathrm{Gr}}(G,A)$ l'ensemble des classes d'extensions de groupes de G par A (modulo les isomorphismes), induisant la structure de G-module trivial sur A. On rappelle que cet ensemble est en bijection avec $H^2(G;A)$. Pour tout 2-cocycle f dans $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Set}}(G^{\times 2},A)$ on notera ξ_f l'extension $0 \to A \to E_f \to G \to 0$ où E_f est l'ensemble $A \times G$ muni de la structure de groupes

$$(a,g) * (b,h) = (a + g \cdot b + f(g,h), gh), \forall a,b \in A, g,h \in G$$

1. Montrer que si $0 \to A \to E \to G \to 0$ est une extension de groupes avec E abélien alors la structure de G-module induite sur A est triviale. En déduire que l'on a une injection
$$\varphi : \mathcal{E}_{\mathcal{A}b}(G;A) \to \mathcal{E}_{\mathrm{Gr}}(G;A)$$
On suppose désormais que A est un G-module trivial.
2. Dans cette partie, on fixe un entier $n \geq 2$ et l'on suppose que G est le groupe cyclique $C_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Montrer que φ est une bijection. (On pourra par exemple comparer $\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(C_n, A)$ avec $H^2(C_n, A)$)
3. Fixons $p > 2$ un nombre premier. Posons $G = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ et $A = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.
   (a) En considérant G comme un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, montrer que l'application déterminant $\det : G^{\times 2} \to A$ est un 2-cocycle.
   (b) En déduire qu'il existe une extension de groupes $0 \to A \to E \to G \to 0$ de G par A, induisant une structure de G-module triviale sur A avec E non abélien.
4. *On admet les deux résultats suivants:*
   - *Suite exacte courte de Künneth pour l'homologie des groupes: pour tous groupes H et K et pour tout entier n, on a une suite exacte courte scindée:*
   $$0 \to \bigoplus_{p+q=n} H_p(H;\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} H_q(K;\mathbb{Z}) \to H_n(H \times K;\mathbb{Z}) \to \bigoplus_{p+q=n-1} \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(H_p(H;\mathbb{Z}), H_q(K;\mathbb{Z})) \to 0$$
   - *Théorème des coefficients universels pour la cohomologie des groupes: pour tout n, on a une suite exacte courte scindée*
   $$0 \to \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(H_{n-1}(G,\mathbb{Z}), A) \to H^n(G,A) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}b}(H_n(G,\mathbb{Z}), A) \to 0$$

   Soient $H = C_n$, $K = C_m$ deux groupes cycliques avec $n,m \geq 2$. On note d le pgcd de n et m. On considère le groupe abélien $G = H \times K$.
   (a) Calculer $H_1(G;\mathbb{Z})$ et $H_2(G;\mathbb{Z})$.
   (b) En déduire qu'il existe des extensions de groupes $0 \to A \to E \to G \to 0$ induisant la structure de G-module trivial sur A avec E non abélien si et seulement si A admet des éléments non nuls de d torsion.
5. **Question bonus**– En utilisant la suite exacte courte scindée de Künneth classique pour les complexes de chaines de R-modules démontrer l'existence de la suite exacte courte scindée de Künneth pour l'homologie des groupes.

Exercice 2: *Soient* $(A, d^A), (B, d^B), (C, d^C)$ *des complexes de chaines de* R*-modules et* $f : A \to B, g : A \to C$ *deux morphismes de complexes de chaines. On définit le complexe de chaines* $\mathrm{Cyl}(f,g)_n = B_n \oplus A_{n-1} \oplus C_n$ *et*

$$\begin{array}{rccc} d_n : & \mathrm{Cyl}(f,g)_n & \to & \mathrm{Cyl}(f,g)_{n-1} \\ & (b,a,c) & \mapsto & (d^B b - f(a), -d^A a, d^C c + g(a)) \end{array}$$

On note $\iota_B : B \to \mathrm{Cyl}(f,g)$ *et* $\iota_C : C \to \mathrm{Cyl}(f,g)$ *les applications définies par* $\iota_B(b) = (b,0,0)$ *et* $\iota_C(c) = (0,0,c)$.

1. Montrer qu'on a une suite exacte courte de complexes de chaines

$$0 \longrightarrow B \oplus C \xrightarrow{\iota_B \oplus \iota_C} \mathrm{Cyl}(f,g) \xrightarrow{\pi_A} A[1] \longrightarrow 0$$

   où $A[1]$ désigne le complexe de chaines $A[1]_n = A_{n-1}$ et $d^{A[1]} = -d^A$.

2. En déduire la longue suite exacte

$$\cdots \longrightarrow H_n(A) \xrightarrow{(H_n(-f), H_n(g))} H_n(B) \oplus H_n(C) \longrightarrow H_n(\mathrm{Cyl}(f,g)) \longrightarrow H_{n-1}(A) \longrightarrow \cdots$$

3. On suppose que f est homotope à f'. Notons $h_n : A_n \to B_{n+1}$ une famille d'applications vérifiant $d^B h + h d^A = f - f'$. Montrer que h induit un isomorphisme de complexes de chaines $\mathrm{Cyl}(f,g) \to \mathrm{Cyl}(f',g)$.

4. *On définit le cylindre de* A *comme le complexe* $\mathrm{Cyl}(A) = \mathrm{Cyl}(id_A, id_A)$. *On définit les applications* $i_-, i_+ : A \to \mathrm{Cyl}(A)$ *par* $i_-(a) = (a,0,0)$ *et* $i_+(a) = (0,0,a)$.

   Montrer que $\mathrm{Cyl}(f,g)$ est la colimite du diagramme

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "i_-"] & & A \arrow[dl, "i_+"'] \arrow[dr, "g"] & \\ B & & \mathrm{Cyl}(A) & & C \end{tikzcd}$$

5. En déduire que $\mathrm{Cyl}(f,g)$ vérifie la propriété suivante: pour tout diagramme

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "g"] & \\ B \arrow[dr, "\varphi"'] & & C \arrow[dl, "\psi"] \\ & Y & \end{tikzcd}$$

   commutatif à homotopie près, c'est-à-dire, tel que φf est homotope à ψg, il existe un morphisme de complexes de chaines $\gamma : \mathrm{Cyl}(f,g) \to Y$ telle que $\gamma \iota_B = \varphi$ et $\gamma \iota_C = \psi$.

6. Réciproquement, montrer que tout morphisme de complexes de chaines $\gamma : \mathrm{Cyl}(f,g) \to Y$ donne lieu à un diagramme ci-dessus commutatif à homotopie près.

Exercice 3:

Soit p un nombre premier. On note $M(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, 2)$ l'espace topologique obtenu à partir de S^2 en y attachant une 3-cellule par une application de degré p.

1. Calculer l'homologie cellulaire à coefficients dans $\mathbb{Z}$ puis dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ de $M(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, 2)$.

2. Soit X l'espace topologique obtenu à partir de $\mathbb{C}P^2$ en y attachant une 3-cellule par une application $S^2 \to \mathbb{C}P^1 \cong S^2 \subset \mathbb{C}P^2$ de degré p. On pose $Y = M(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, 2) \vee S^4$.

   (a) Montrer en les calculant que X et Y ont mêmes groupes d'homologie à coefficients dans $\mathbb{Z}$.

   (b) Montrer que $H^*(X, \mathbb{Z})$ et $H^*(Y, \mathbb{Z})$ sont des algèbres commutatives graduées isomorphes.

3. Les algèbres graduées commutatives $H^*(X, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ et $H^*(Y, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ sont-elles isomorphes? (Justifier).