Université Paris Diderot
Algèbre Homologique et Topologie algébrique **13h30-16h30**
M2 Math

Examen du 4 novembre 2016

Exercice 1:

Soit R un anneau. La catégorie des R-modules à gauche est notée ${}_{\mathrm{R}}\mathrm{Mod}$, celle des R-modules à droite $\mathrm{Mod}_{\mathrm{R}}$ et la catégorie des groupes abéliens est notée $\mathcal{A}b$.

Un *δ-foncteur* F de ${}_{\mathrm{R}}\mathrm{Mod}$ dans $\mathcal{A}b$ est la donnée de foncteurs additifs $F_i : {}_{\mathrm{R}}\mathrm{Mod} \to \mathcal{A}b$, pour $i \in \mathbb{N}$, vérifiant:

- Pour tout suite exacte courte de R-modules à gauche

$$\mathcal{E} : \ 0 \to A \to B \to C \to 0$$

il existe un morphisme $\delta_i^{\mathcal{E}} : F_i(C) \to F_{i-1}(A)$ tel que la longue suite

$$\ldots F_{i+1}(C) \stackrel{\delta_{i+1}^{\mathcal{E}}}{\to} F_i(A) \to F_i(B) \to F_i(C) \stackrel{\delta_i^{\mathcal{E}}}{\to} \ldots F_1(C) \stackrel{\delta_1^{\mathcal{E}}}{\to} F_0(A) \to F_0(B) \to F_0(C) \to 0$$

est exacte.

- Pour tout morphisme de suites exactes courtes $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ et pour tout $i \geq 1$, le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd} F_i(C) \arrow[r, "\delta_i^{\mathcal{E}}"] \arrow[d, "F_i(f)"'] & F_{i-1}(A) \arrow[d, "F_{i-1}(f)"] \\ F_i(C') \arrow[r, "\delta_i^{\mathcal{E}'}"] & F_{i-1}(A') \end{tikzcd}$$

On dit qu'un δ-foncteur vérifie la propriété $\mathcal{P}$ si pour tout module projectif P et pour tout $i \geq 1$ on a $F_i(P) = 0$.

Dans tout l'exercice, on se fixe un δ foncteur F. On pose $F_0(R) = M$.

1. Montrer que M est muni d'une structure de R-module à droite. (Indication: pour tout $a \in R$ on pourra considérer le morphisme $\rho_a : R \to R$ dans ${}_{\mathrm{R}}\mathrm{Mod}$ défini par $\rho_a(r) = ra$ et étudier $F_0(\rho_a)$)
2. Soit N un objet de ${}_{\mathrm{R}}\mathrm{Mod}$ et $n \in N$. Soit $\lambda_n : R \to N$ le morphisme dans ${}_{\mathrm{R}}\mathrm{Mod}$ définit par $\lambda_n(r) = rn$.
   Montrer que l'application $M \times N \to F_0(N)$ qui à (m, n) associe $F_0(\lambda_n)(m)$ induit un morphisme de groupes abéliens
   $$\psi_N : M \otimes_R N \to F_0(N)$$
   et que ψ est une transformation naturelle de foncteurs $(M \otimes_R -) \to F_0$.
3. On suppose que F_0 préserve les sommes directes (quelconques).
   (a) Montrer que si N est un R-module à gauche libre alors ψ_N est un isomorphisme.
   (b) En déduire que ψ est un isomorphisme de foncteurs.
4. Dans cette question, on suppose que F vérifie la propriété $\mathcal{P}$.
   (a) Montrer que si $0 \to M \to P \to A \to 0$ est une suite exacte courte dans ${}_{\mathrm{R}}\mathrm{Mod}$ avec P projectif alors $F_i(A)$ est isomorphe à $F_{i-1}(M)$, pour tout $i \geq 2$ et $F_1(A)$ est le noyau de l'application $F_0(M) \to F_0(P)$.
   (b) En déduire que le foncteur F_i est isomorphe au i-ème foncteur dérivé à gauche de F_0, noté $L_i(F_0)$.
5. Conclusion: si F vérifie la propriété $\mathcal{P}$ et si F_0 préserve les sommes directes, montrer que pour tout N objet de ${}_{\mathrm{R}}\mathrm{Mod}$, $F_i(N)$ est isomorphe à $\mathrm{Tor}_i(M, N)$.

Correction de l'exercice 1

1. Le morphisme $\rho_a : R \to R$ est un morphisme de R-modules à gauche, il induit donc un morphisme de groupes abéliens $F_0(\rho_a) : M \to M$. Notons
$$m \cdot a = F_0(\rho_a)(m)$$
On a donc
$$(m + m') \cdot a = m \cdot a + m' \cdot a, \forall m, m' \in M, a \in R$$
puisuqe $F_0(\rho_a)$ est un morphisme de groupes abéliens.
Par ailleurs
Si $a = 1_R$ alors $\rho_a = id_R$ donc $F_0(\rho_a) = id_M$, donc $m \cdot 1_R = m$
Pour $a, b \in R$ on a $(\rho_a \circ \rho_b)(r) = \rho_a(rb) = rba = \rho_{ba}(r)$, donc
$$(m \cdot a) \cdot b = F_0(\rho_b)(F_0(\rho_a)(m)) = F_0(\rho_b \circ \rho_a)(m) = F_0(\rho_{ab})(m) = (ab) \cdot m$$
Enfin on a $\rho_{a+a'} = \rho_a + \rho_{a'}$ et comme F_0 es tun foncteur abélien $F_0(\rho_{a+a'}) = F_0(\rho_a) + F_0(\rho_{a'})$, donc $(a + a') \cdot m = a \cdot m + a' \cdot m$.
M est donc muni d'une structure de R-module à droite.

2. Soit N un objet de ${}_{\mathrm{R}}\mathrm{Mod}$ et $n \in N$. Soit $\lambda_n : R \to N$ le morphisme dans ${}_{\mathrm{R}}\mathrm{Mod}$ définit par $\lambda_n(r) = rn$.
Notons ϕ l'application $M \times N \to F_0(N)$ qui à (m, n) associe $F_0(\lambda_n)(m)$.
On a $\lambda_{n+n'} = \lambda_n + \lambda_{n'}$ et F_0 est additif donc ϕ est linéaire en le deuxième facteur et le fait que $F_0(\lambda_n)$ soit un morphisme de groupes abéliens implique la linéarité en le premier facteur. De plus pour tout $r \in R$ on a
$$\phi(m \cdot r, n) = F_0(\lambda(n))(m \cdot r) = F_0(\lambda_n)(F_0(\rho_r)(m))$$
Mais $(\lambda_n \rho_r) = \lambda_{rn}$. Donc $\phi(m \cdot r, n) = \phi(m, rn)$. Ainsi ϕ est quasi-linéaire donc induit un morphisme de groupes abéliens
$$\psi_N : M \otimes_R N \to F_0(N)$$
Soit $\alpha : N \to N'$ un morphisme dans ${}_{\mathrm{R}}\mathrm{Mod}$, en particulier $\forall n \in N, \forall r \in R \alpha(rn) = r\alpha(n)$ donc $\alpha \circ \lambda_n = \lambda_{\alpha(n)}$. Ceci implique la commutativité du diagramme
$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "\phi_N"] \arrow[d, "1_M \times \alpha"'] & F_0(N) \arrow[d, "F_0(\alpha)"] \\ M \times N' \arrow[r, "\phi_{N'}"] & F_0(N') \end{tikzcd}$$
donc la commutativité du diagramme
$$\begin{tikzcd} M \otimes_R N \arrow[r, "\psi_N"] \arrow[d, "1_M o \times_R \alpha"'] & F_0(N) \arrow[d, "F_0(\alpha)"] \\ M \otimes_R N' \arrow[r, "\psi_{N'}"] & F_0(N') \end{tikzcd}$$
Donc ψ est une transformation naturelle de foncteurs $(M \otimes_R -) \to F_0$.

3. On suppose que F_0 préserve les sommes directes (quelconques).
   (a) Si $N = R$, et $a \in R$ comme $\lambda_a = \rho_a$ on a $\psi_R : F_0(R) \otimes_R R \to F_0(R)$ est l'isomorphisme canonique $m \otimes r \mapsto m \cdot r$. Si $N = \oplus_\alpha R$ comme F_0 préserve les sommes directes, le produit tensoriel aussi on obtient que $\psi_N = \oplus_\alpha \psi_R$ est un isomorphisme de groupes abéliens.

(b) Soit $N \in {}_{\mathrm{R}}\mathrm{Mod}$. Il existe une suite exacte courte $N_2 \to N_1 \to N \to 0$ avec N_2 et N_1 libres (Il suffit de prendre le début d'une résolution libre de N). On applique ψ à cette suite exacte sachant que F_0 et $M \otimes_R -$ sont deux foncteurs exacts à droite, ce qui donne

$$\begin{tikzcd} M \otimes_R N_2 \arrow[r] \arrow[d, "\psi_{N_2}"'] & M \otimes_R N_1 \arrow[r] \arrow[d, "\psi_{N_1}"'] & M \otimes_R N \arrow[r] \arrow[d, "\psi_N"'] & 0 \\ F_0(N_2) \arrow[r] & F_0(N_1) \arrow[r] & F_0(N) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Or ψ_{N_2} et ψ_{N_1} sont des isomorphismes, il en est de même pour ψ_N.
Pour chaque N on a donc un morphisme de groupes abéliens $\Gamma_N : F_0(N) \to M \otimes_R N$ tel que $\Gamma_N \circ \psi_N = Id_{M\otimes_R N}$ et $\psi_N \circ \Gamma_N = Id_{F0(N)}$. Ces conditions impliquent que Γ est une transformation naturelle inverse de ψ, donc les foncteurs F_0 et $M \otimes_R -$ sont isomorphes.

4. Dans cette question, on suppose que F vérifie la propriété $\mathcal{P}$.

(a) Comme F est un δ-foncteur et s'annule sur les projectifs on a le résultat de manière évidente (voir TD)

(b) On rappelle que si $f : A \to A'$ est un morphisme, alors on peut construire un morphisme de suites exactes courtes

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M \arrow[r] \arrow[d] & P \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & M' \arrow[r] & P' \arrow[r] & A' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

avec P et P' projectif.
Par la question précedente et par récurrence $F_1(A)$ est le noyau de l'application $F_0(M) \to F_0(P)$ tout comme $L_1(F_0)(A)$ et cet isomorphisme est fonctoriel. On suppose que l'on a un isomorphisme de foncteurs $\psi_i : F_i \to L_i(F_0)$ alors le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} F_{i+1}(A) \arrow[r, "\delta_i"] & F_i(M) \arrow[d, "\psi_i(M)"] \\ L_{i+1}(F_0(A)) \arrow[r, "\delta_i"] & L_i(F_0(M)) \end{tikzcd}$$

nous permet de construire un morphisme de foncteurs $(\psi_{i+1})_A : F_{i+1}(A) \to L_{i+1}(F_0)(A)$, défini comme la composée $(\delta_i)^{-1}\psi_i(M)\delta_i$. Par fonctorialité des morphismes de connexions δ_i et de ψ_i (par récurrence), on en déduit que ψ_{i+1} est une transformation naturelle de foncteurs; pour chaque A c'est un isormorphisme, donc ψ_{i+1} est un isomorphisme de foncteurs.

5. On a F_0 est isomorphe au foncteur $M \otimes_R -$ et les F_i sont isomorphes au i-ème foncteur dérivé de F_0 qui est par définition $\mathrm{Tor}_i(M, -)$.

Exercice 2:
Soit R un anneau et B un R-module à gauche. Pour $r \in R$, on note ${}_rB = \{b \in B | r \cdot b = 0\}$ et $r \cdot B = \{r \cdot b, b \in B\}$.

1. On pose $R = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ et $A = \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ avec d divise m et $m \geq 2$. Montrer que, pour tout R-module B, on a:

$$\begin{cases} \mathrm{Ext}^0_R(A, B) = {}_dB \\ \mathrm{Ext}^i_R(A, B) = ({}_{\frac{m}{d}}B)/(d \cdot B), & \text{si } i \text{ est impair,} \\ \mathrm{Ext}^i_R(A, B) = ({}_dB)/(\frac{m}{d} \cdot B), & \text{si } i \geq 2 \text{ est pair.} \end{cases}$$

2. Donner une extension représentative pour chaque classe d'équivalence d'extensions de $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ par $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ en tant que $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$-module.

(*On rappelle que les extensions de R-modules de A par B : $0 \to B \to X \to A \to 0$ sont classifiées à équivalence près par* $\mathrm{Ext}^1_R(A, B)$.)

Correction de l'exercice 2

1. Voir poly de Bichon-Taillefer, exemple A5, chapitre 5

$$\begin{cases} \mathrm{Ext}^0_R(A,B) = \mathrm{Hom}_R(A,B) = ({}_dB) & \\ \mathrm{Ext}^n_R(A,B) = ({}_{m/d}B/(dB) & \text{si }, n \text{ est impair} \\ \mathrm{Ext}^n_R(A,B) = ({}_dB)/(\frac{m}{d}B) & \text{si }, n \geq 2 \text{ est pair} \end{cases}$$

2. On a $R = \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$, $A = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ et $B = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ donc $\mathrm{Ext}^1_R(A,B) = ({}_2B)/4B = B$ car $4B = 0$ et ${}_2B = B$. Il y a deux classes d'équivalence d'extensions de $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ par $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ en tant que $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$-module. Ces deux classes sont données par les représentants suivants

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \xrightarrow{\times 4} \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \xrightarrow{\pi} \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

où π est la projection canonique et la suite scindée $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$. Ces deux extensions ne sont pas isomorphes car les groupes abéliens $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ ne le sont pas.

Exercice 3:

On fixe x_0 un point de S^2, la sphère de dimension 2. On considère les CW-complexes suivants:

- X est obtenu à partir de $S^2 \times S^2$ en attachant une 3-cellule à $\{x_0\} \times S^2$ par une application de degré 2.
- Y est obtenu à partir de $S^2 \vee S^2 \vee S^4$ en attachant une 3-cellule au deuxième facteur S^2 par une application de degré 2.

1. Donner une décomposition cellulaire des espaces X et Y.
2. Calculer la cohomologie de X et de Y, à coefficients dans $\mathbb{Z}$, puis à coefficients dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
3. On note $i : S^2 \times S^2 \to X$ l'inclusion canonique.
   (a) Soit $\alpha \in H^2(X,\mathbb{Z})$. Montrer que $i^*(\alpha \cup \alpha) = 0$. En déduire que $H^*(X,\mathbb{Z})$ et $H^*(Y,\mathbb{Z})$ sont des anneaux isomorphes.
   (b) Montrer que $i^* : H^k(X,\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to H^k(S^2 \times S^2, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ est un isomorphisme pour k pair.
   (c) En déduire qu'il existe $\alpha, \beta \in H^2(X,\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ tels que $\alpha \cup \beta \neq 0$.
4. Montrer que X et Y ne sont pas homotopiquement équivalents.

Correction de l'exercice 3

1. Une décomposition cellulaire de S^2 est donnée par: 1 0-cellule et 1 2-cellule attaché à la 0 cellule par une application constante, une décomposition cellulaire de $S^2 \times S^2$ est donnée par une 0-cellule, deux 2-cellules, une 4-cellules.

   Par conséquent une décomposition cellulaire de X est donnée par

   Une 0-cellule;

   Deux 2-cellules (qui sont les 2-cellules de $S^2 \times S^2$);

   Une 3-cellule

   Une 4-cellule (qui correspond à la 4 cellule de $S^2 \times S^2$).

   Une décomposition cellulaire de Y est obtenue avec : une 0-cellule (le point base), deux 2-cellules (pour les 2-cellules de $S^2 \vee S^2$), une 4-cellule (pour le facteur S^4 de Y) et une 3-cellule.

2. Le complexe cellulaire associé à X est le même que celui associé à Y et est le suivant

$$\mathbb{Z}(4) \xrightarrow{0} \mathbb{Z}(3) \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 \\ \times 2 \end{pmatrix}} \mathbb{Z}(2) \oplus \mathbb{Z}(2) \xrightarrow{0} 0 \xrightarrow{0} \mathbb{Z}(0)$$

Si on veut calculer la cohomologie à coefficients dans $\mathbb{Z}$ on obtient le complexe suivant

$$\mathbb{Z}(4) \xleftarrow{0} \mathbb{Z}(3) \xleftarrow{(0,\times 2)} \mathbb{Z}(2) \oplus \mathbb{Z}(2) \xleftarrow{0} 0 \xleftarrow{0} \mathbb{Z}(0)$$

ce qui donne pour X et pour Y

$$\begin{cases} H^0(X,\mathbb{Z}) = & \mathbb{Z} \\ H^2(X,\mathbb{Z}) = & \mathbb{Z} \\ H^3(X,\mathbb{Z}) = & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \\ H^4(X,\mathbb{Z}) = & \mathbb{Z} \\ H^k(X,\mathbb{Z}) = & 0, \text{ sinon .} \end{cases}$$

Explication $H^2(X,\mathbb{Z}) = Ker(\varphi = (0,\times 2) : \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z} \to \mathbb{Z})$; prenons $x+y$ un élément de $\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$. On a $\varphi(x+y) = 2y = 0$ si et seulement si $y = 0$. Donc $H^2(X,\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$. Par ailleurs $Im(\varphi) = \{z = 2y | y \in \mathbb{Z}\}$ donc $H^3(X,\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Si on veut calculer la cohomologie à coefficients dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ on obtient le complexe suivant

$$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}(4) \xleftarrow{0} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}(3) \xleftarrow{0} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}(2) \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}(2) \xleftarrow{0} 0 \xleftarrow{0} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}(0)$$

ce qui donne pour X et pour Y

$$\begin{cases} H^0(X,\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \\ H^2(X,\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \\ H^3(X,\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \\ H^4(X,\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \\ H^k(X,\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = & 0, \text{ sinon .} \end{cases}$$

3. On note $i : S^2 \times S^2 \to X$ l'inclusion canonique. On remarque que avec la décomposition cellulaire de $S^2 \times S^2$ donnée en 1. on a $S^2 \times S^2$ est un sous-complexe cellulaire de X.

   (a) Par conséquent, i induit un morphisme de complexe de chaines cellulaires

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z}(4) \arrow[r] \arrow[d, "i_*"', "\approx"] & 0 \arrow[r] \arrow[d, "0"] & \mathbb{Z}(2) \oplus \mathbb{Z}(2) \arrow[r] \arrow[d, "i_*"', "\approx"] & 0 \arrow[r] \arrow[d, "i_*"', "\approx"] & \mathbb{Z}(0) \arrow[d, "i_*"', "\approx"] \\
\mathbb{Z}(4) \arrow[r, "0"] & \mathbb{Z}(3) \arrow[r, "\begin{pmatrix} 0 \\ \times 2 \end{pmatrix}"] & \mathbb{Z}(2) \oplus \mathbb{Z}(2) \arrow[r, "0"] & 0 \arrow[r, "0"] & \mathbb{Z}(0)
\end{tikzcd}$$

   et donc un morphisme de complexe de cochaines

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z}(4) & 0 \arrow[l] & \mathbb{Z}(2) \oplus \mathbb{Z}(2) \arrow[l] & 0 \arrow[l] & \mathbb{Z}(0) \arrow[l] \\
\mathbb{Z}(4) \arrow[u, "\approx", "i^*"'] & \mathbb{Z}(3) \arrow[l, "0"'] \arrow[u] & \mathbb{Z}(2) \oplus \mathbb{Z}(2) \arrow[l, "{(0,\times 2)}"'] \arrow[u, "\approx", "i^*"'] & 0 \arrow[l, "0"'] \arrow[u] & \mathbb{Z}(0) \arrow[l, "0"'] \arrow[u, "\approx", "i^*"']
\end{tikzcd}$$

   On en déduit que $H^2(i) : \mathbb{Z} = H^2(X,\mathbb{Z}) \to H^2(S^2 \times S^2) = H^2(S^2) \otimes H^0(S^0) \oplus H^0(S^2) \otimes H^2(S^2)$ associe à $\alpha \in \mathbb{Z}$ le terme $1 \otimes \alpha$. Par conséquent

$$i^*(\alpha \cup \alpha) = i^*(\alpha) \cup i^*(\alpha) = (1 \otimes \alpha) \cup (1 \otimes \alpha) = 1 \otimes (\alpha \cup \alpha) = 0$$

   Mais $H^4(i) : H^4(X,\mathbb{Z}) \to H^4(S^2 \times S^2)$ est un isomorphisme donc $\alpha \cup \alpha = 0 \in H^4(X,\mathbb{Z})$.

Soient β, β' deux éléments de $H^*(X,\mathbb{Z})$ de degré > 0. Pour des raisons de degré, les seuls $\cup$-produits susceptibles d'être non nuls, sont ceux pour lesquels $\beta, \beta' \in H^2(X,\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, cas que l'on vient de traiter. Conclusion: tous les $\cup$-produits d'éléments de degré > 0 sont nuls. Les seuls éléments de degré 0 sont de la forme $u1$ avec $u \in \mathbb{Z}$.

Le même raisonnement fonctionne pour l'inclusion $S^2 \vee S^2 \to Y$, donc $H^*(X,\mathbb{Z})$ et $H^*(Y,\mathbb{Z})$ sont des anneaux isomorphes.

(b) Reprenons notre diagramme de cochaines lorsque les coefficients sont dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. On a

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}(4) & 0 \arrow[l] & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}(2) \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}(2) \arrow[l] & 0 \arrow[l] & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}(0) \arrow[l] \\
\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}(4) \arrow[u, "\approx"', "i^*"] & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}(3) \arrow[l, "0"'] \arrow[u] & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}(2) \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}(2) \arrow[l, "0"'] \arrow[u, "\approx"', "i^*"] & 0 \arrow[l, "0"'] \arrow[u] & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}(0) \arrow[l, "0"'] \arrow[u, "\approx"', "i^*"]
\end{tikzcd}$$

Donc $i^* : H^k(X,\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to H^k(S^2 \times S^2, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ est un isomorphisme pour k pair.

(c) Le théorème de Künneth s'applique encore dans le cas $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, donc $H^*(S^2 \times S^2, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \approx H^*(S^2, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})) \otimes H^*(S^2, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ en particulier si α (β) est un générateur de $H^2(S^2)$, où S^2 est vu comme la première (deuxième) composante de $S^2 \times S^2$ on a $\alpha \cup \beta = (\alpha \otimes 1) \cup (1 \otimes \beta) = (\alpha \otimes \beta)$ est un générateur de $H^4(S^2 \times S^2, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$. via l'isomorphisme i^* en degré pair, on en déduit qu'il existe $\alpha, \beta \in H^2(X, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ tels que $\alpha \cup \beta \neq 0$.

4. Si on reprend le raisonnement précédent pour Y on a $j^* : H^k(Y, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to H^k(S^2 \vee S^2 \vee S^4, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ est un isomorphisme pour k pair, mais cette fois-ci, pour tous $\alpha, \beta \in H^2(Y, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ on a $\alpha \cup \beta = 0$.

   Donc les anneaux $H^*(X, \mathbb{Z} + /2\mathbb{Z})$ et $H^*(Y, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ ne sont pas isomorphes. Donc les espaces X et Y ne sont pas homotopiquement équivalents.

Exercice 4:

Soit X un espace topologique. Soit p un nombre premier. Notons que la suite exacte courte

$$0 \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \stackrel{\times p}{\to} \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \to 0,$$

où $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est la projection canonique, induit une suite exacte longue en cohomologie singulière

$$\ldots \to H^n(X, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \to H^n(X, \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}) \to H^n(X, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \to H^{n+1}(X, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \to \ldots$$

1. Décrire l'opérateur cobord dans la longue suite exacte: $\beta : H^n(X, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \to H^{n+1}(X, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$.
2. Montrer que $\beta(x \cup y) = \beta(x) \cup y + (-1)^{|x|} x \cup \beta(y)$.
3. On suppose $p = 2$. Montrer que pour $x \in H^1(X, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ on a $\beta(x) = x \cup x$.
4. En déduire la structure d'anneau de $H^*(\mathbb{R}P^2, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$

Correction Exercice 4

Notons $\pi : \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ la projection. On note également $p \cdot a$ l'image par l'application $\times p$ d'un élément $a \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

On a une suite exacte courte

$$0 \to \mathrm{Hom}(C_*(X), \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \stackrel{p_*}{\to} \mathrm{Hom}(C_*(X), \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}) \stackrel{\pi_*}{\to} \mathrm{Hom}(C_*(X), \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \to 0,$$

qui donne une suite exacte longue en cohomologie.

1. Soit $\varphi \in \mathrm{Hom}(C_n(X), \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ un cocycle qui représente $[\varphi] \in H^n(X, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$. Pour chaque $\sigma \in C_n(X)$ on choisit un représentant $\tilde{\varphi}(\sigma) \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$ que l'on voit comme un élément de $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$. Cela permet de définir $\tilde{\varphi} \in \mathrm{Hom}(C_n(X), \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z})$ tel que $\pi_*(\tilde{\varphi}) = \varphi$.

   On déduit de l'égalité
   $$\pi_*(\partial\tilde{\varphi}) = \partial\pi_*(\tilde{\varphi}) = \partial\varphi = 0,$$
   que
   $$\forall \sigma \in C_{n+1}(X), \exists x_\sigma \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, (\partial\tilde{\varphi})(\sigma) = p \cdot x_\sigma.$$
   On définit alors $\psi(\sigma) = x_\sigma$ et
   $$\beta([\varphi]) = [\psi] \in H^{n+1}(X, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}).$$

2. Quelques notations: pour $x \in \mathbb{Z}$ on note $\bar{x}$ la classe de x dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ et $[x]$ la classe de x dans $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$. On a par définition

$$p \cdot \bar{x} := (\times p)(\bar{x}) = [px]$$

Ainsi on constate que

$$(\star) \qquad p \cdot (\overline{xy}) = [pxy] = [px][y] = (p \cdot \bar{x})[y], \text{ et } p \cdot (\overline{xy}) = [pxy] = [x][py] = [x](p \cdot \bar{y})$$

Soient $\varphi \in \mathrm{Hom}(C_k(X), \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ et $\psi \in \mathrm{Hom}(C_l(X), \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ des cocycles, et $\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}$ les éléments de $C^*(X, \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z})$ définis à la question précédente. On a

$$\partial(\tilde{\varphi} \cup \tilde{\psi}) = \partial(\tilde{\varphi}) \cup \tilde{\psi} + (-1)^k \tilde{\varphi} \cup \partial(\tilde{\psi})$$

et il existe $u \in \mathrm{Hom}(C_{k+1}(X), \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ et $v \in \mathrm{Hom}(C_{l+1}(X), \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ tels que $\partial\tilde{\varphi} = p \cdot u$ et $\partial\tilde{\psi} = p \cdot v$.

$$\partial(\tilde{\varphi} \cup \tilde{\psi}) = (p \cdot u) \cup \tilde{\psi} + (-1)^k \tilde{\varphi} \cup (p \cdot v)$$

Posons $a = u \cup \psi \in \mathrm{Hom}(C_{k+l+1}(X), \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$. Pour tout $\sigma \in C_{k+l+1}$ on a

$$a(\sigma) = u(\sigma|_{[v_0,\dots,v_{k+1}]})\psi(\sigma_{[v_{k+1},\dots,v_{k+l+1}]}).$$

Pour tout $\tau \in C_l(X)$, on peut choisir un représentant de $\psi(\tau)$ dans $\mathbb{Z}$ tel que sa classe dans $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ corresponde à $\tilde{\psi}(\tau)$. En utilisant les équations $\star$ on obtient $p \cdot a(\sigma) = p \cdot u(\sigma|_{[v_0,\dots,v_{k+1}]})\tilde{\psi}(\sigma_{[v_{k+1},\dots,v_{k+l+1}]})$, donc $(p \cdot u) \cup \tilde{\psi} = p \cdot (u \cup \psi)$; de la même manière, on a $\tilde{\varphi} \cup (p \cdot v) = p \cdot (\varphi \cup v)$. D'où le résultat.

3. On note également x pour un cocycle représentant $x \in H^1(X, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$. Pour tout σ, on choisit $\tilde{x}(\sigma) \in \{0, 1\} \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ tel que $p_*(\tilde{x}) = x$. On a alors

$$(\star\star) \quad (\partial\tilde{x})(\sigma) = \tilde{x}(\sigma|_{[v_1,v_2]}) - \tilde{x}(\sigma|_{[v_0,v_2]}) + \tilde{x}(\sigma|_{[v_0,v_1]})$$

Or $(\partial x)(\sigma) = 0 \in \mathbb{Z} + 2\mathbb{Z}$ donc $(\partial\tilde{x})(\sigma) \in \{0, 2\}$. Si $\partial\tilde{x}(\sigma) = 0$ alors $\beta(x)(\sigma) = 0$ et si $\partial\tilde{x}(\sigma) = 2$ alors $\beta(x)(\sigma) = 1$. Remarques également que $\partial\tilde{x}(\sigma) = 2$ si et seulement si $\tilde{x}(\sigma|_{[v_0,v_1]}) = \tilde{x}(\sigma|_{[v_1,v_2]}) = 1$

Par ailleurs

$$(x \cup x)(\sigma) = x(\sigma|_{[v_0,v_1]})x(\sigma|_{[v_1,v_2]})$$

Si $(x \cup x)(\sigma) = 1$, alors nécessairement $\tilde{x}(\sigma|_{[v_0,v_1]}) = 1$, $\tilde{x}(\sigma|_{[v_1,v_2]}) = 1$, donc $\beta(x)(\sigma) = 1$.

Si $(x \cup x)(\sigma) = 0$, alors nécessairement l'un des deux termes $\tilde{x}(\sigma|_{[v_0,v_1]}), \tilde{x}(\sigma|_{[v_1,v_2]})$ est nul donc $(\partial\tilde{x})(\sigma) = 0$ et $\beta(x)(\sigma) = 0$. Conclusion $\beta(x) = x \cup x$.

4. Montrons que $\beta : H^1(\mathbb{R}P^2, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to H^2(\mathbb{R}P^2, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ est surjective ce qui revient à montrer que la multiplication par $2 : H^2(\mathbb{R}P^2, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to H^2(\mathbb{R}P^2, \mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$ est nulle. Le complexe cellulaire de $\mathbb{R}P^2$ est le suivant

$$\mathbb{Z}(2) \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z}(1) \xrightarrow{0} \mathbb{Z}(0)$$

ce qui donne au niveau des cochaines à coefficients

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}(2) \arrow[d, "\times 2"'] & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}(1) \arrow[l, "\times 2 = 0"'] \arrow[d, "\times 2"'] & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}(0) \arrow[l, "0"'] \arrow[d, "\times 2"'] \\
\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}(2) & \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}(1) \arrow[l, "\times 2"'] & \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}(0) \arrow[l, "0"']
\end{tikzcd}$$

Par conséquent la mulplication par $2 : \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = H^2(\mathbb{R}P^2, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to H^2(\mathbb{R}P^2, \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}/(2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$ est nulle. Donc β est surjective. Soit y un générateur de $H^2(\mathbb{R}P^2, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, il existe $x \in H^1(\mathbb{R}P^2, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ tel que $\beta(x) = x \cup x = y$. Donc $H^*(\mathbb{R}P^2, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[x]/(x^3)$ où x est de degré 1.