M2 **Université Paris Diderot**
2017-2018

Algèbre Homologique et Topologie Algébrique
Chapitre 1–Notions de base

1 Le langage des catégories.

Référence: MLcat

1.1 Définitions générales

Les notions suivantes se trouvent dans le chapitre 1 et 2 de MLCat.

1. Catégorie; catégorie petite, catégorie localement petite. Notations du cours: pour $\mathcal{C}$ une catégorie, on note $Ob(\mathcal{C})$ la classe des objets, et pour tout couple d'objets c, d de $\mathcal{C}$ on note $\mathcal{C}(c, d)$ la classe des morphismes de source c et de but d.

2. Exemples: La catégorie des
   (a) ensembles notée Set
   (b) groupes abéliens, notée $\mathcal{A}b$
   (c) Espaces topologiques, notée Top; espaces topologiques pointés, noté Top_*
   (d) groupes, notée Gp
   (e) ${}_R\mathrm{Mod}, \mathrm{Mod}_R$ modules à droites et modules à gauche, cas particulier où $R = \mathbb{Z}$.

3. Catégorie opposée

4. Foncteurs covariants, contravariants, la composée de deux foncteurs est un foncteur; exemples
   (a) $\pi_0(X)$ l'ensemble des composantes connexes par arcs d'un espace topologique induit un foncteur $\mathrm{Top} \to \mathrm{Set}$;
   (b) $\pi_1(X, x_0)$ induit un foncteur $\mathrm{Top}_* \to \mathrm{Gp}$ où Top_* est la catégorie des espaces pointés. On verra en TD la notion de groupoïdes.
   (c) Groupe abélien libre $\mathbb{Z}[S]$
   (d) R-module libre (à gauche) $R[S]$
   (e) Soit $\mathcal{C}$ une catégorie et c un objet de $\mathcal{C}$. Définition des foncteurs covariant $\mathcal{C}(c, -) : \mathcal{C} \to \mathrm{Set}$ et contravariant $\mathcal{C}(-, c)$. Un foncteur contravariant $G : \mathcal{C} \to \mathrm{Set}$ est représentable s'il est isomorphe à un foncteur de la forme $\mathcal{C}(-, c)$. On dit alors que c représente G.

5. Transformations naturelles. La catégorie des foncteurs de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{D}$ est notée $\mathcal{F}un(\mathcal{C}, \mathcal{D})$.

6. Un isomorphisme dans une catégorie $\mathcal{C}$ est un morphisme $f \in \mathcal{C}(c, d)$ tel qu'il existe $g \in \mathcal{C}(d, c)$ vérifiant $g \circ f = 1_c, f \circ g = 1_d$.

1.2 Foncteurs adjoints

Les notions suivantes se trouvent dans le chapitre 4 de MLcat.

Définition d'une adjonction (p77 MLCat); l'unité de l'adjonction, la counité de l'adjonction sont des transformations naturelles. Les foncteurs $\mathbb{Z}[S]$ et $R[S]$ sont adjoints à gauche des foncteurs oublis.

1.3 Propriété universelle

Les notions suivantes se trouvent dans le chapitre 3 de MLcat.

Notion de coproduit et produit dans une catégorie. Exemples: dans Set, dans $\mathcal{A}$b, dans Gp, dans Top.

Notion de cocone et colimite d'un foncteur $F : I \to \mathcal{C}$ où I est une petite catégorie; remarque: un tel foncteur est appelé aussi I-diagramme. Notion duale de cone et limite d'un I-diagramme.

Exemples:

Pushout (ou somme amalgamée) colimite sur

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r] \arrow[d] & b \\ c & \end{tikzcd}$$

Pullback (ou produit fibré) limite sur

$$\begin{tikzcd} & b \arrow[d] \\ a \arrow[r] & c \end{tikzcd}$$

Fin du cours du 12 septembre 2017

1.4 Adjunction et (co)limite

Théorème 1.1. *Soit $R : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ un foncteur. Si R possède un adjoint à gauche alors celui-ci est unique à isomorphisme près.*

Démonstration faite en cours.

Définition 1.2. *On dit que $\mathcal{C}$ admet toutes les colimites si pour toute catégorie I pour tout I-diagramme $F : I \to \mathcal{C}$ $\operatorname{colim}_I F$ existe. Si $\mathcal{C}$ admet toutes les colimites, alors pour tout I, on peut construire le foncteur $\operatorname{colim}_I : \mathcal{F}\mathrm{un}(I, \mathcal{C}) \to \mathcal{C}$. On peut faire de même si $\mathcal{C}$ admet toutes les limites.*

Les foncteurs (quand ils existent) $\operatorname{colim}, \lim : \mathcal{F}un(I, \mathcal{C}) \to \mathcal{C}$ et $\Delta : \mathcal{C} \to Fun(I, \mathcal{C})$ où Δ est le foncteur constant vérifient: colim est l'adjoint à gauche, lim est l'adjoint à droite de Δ.

Corollaire 1.3. *Les adjoints à gauche préservent les colimites; les adjoints à droites préservent les limites.*

1.5 Addentum

Notions d'épimorphismes, monomorphismes dans une catégorie.

Notion d'objet initial, objet final, objet nul (ou zéro).

2 Complexes de chaines

2.1 Un peu de catégorie adittive

A prendre dans [W] chapitre 1

Les notions définies sont

1. $\mathcal{A}$b-catégorie $\mathcal{C}$: (a) pour tous a,b objets de $\mathcal{C}$, on a $\mathcal{C}(a,b)$ est un groupe abélien, (b) la composition est bilinéaire.

2. Foncteur additif

3. Catégorie additive: c'est une $\mathcal{A}$b-catégorie avec objet nul, produits et coproduits finis. On note le coproduit $X \oplus Y$ à la place de $X \sqcup Y$.

4. Si $\mathcal{C}$ est additive alors $\mathcal{F}\mathrm{un}(I, \mathcal{C})$ aussi.

5. L'existence de coproduits et produits finis dans une catégorie additive est équivalent à l'existence de biproduits: pour tous objets X, Y de $\mathcal{C}$ il existe un objet Z et des morphismes $i_1 : X \to Z, i_2 : Y \to Z, p_1 : Z \to X$ et $p_2 : Z \to Y$ satisfaisant $p_1 i_1 = 1_X, p_2 i_2 = 1_Y, p_1 i_2 = p_2 i_1 = 0, i_1 p_1 + i_2 p_2 = 1_Z$.

6. Complexe de chaines.

2.2 Un peu de catégorie abélienne

Les notions définies sont

1. Noyau, conoyau d'un morphisme dans une catégorie additive. Lemme: un conoyau est un épimorphisme; un noyau est un monomorphisme.

2. Catégorie abélienne: c'est une catégorie additive admettant noyaux et conoyaux et vérifiant: tout monomorphisme est le noyau de son conoyau; tout épimorphisme est le conoyau de son noyau.

3. Image et coimage; tout morphisme $f : X \to Y$ induit un morphisme $\mathrm{Coim}\, f \to \mathrm{Im}\, f$.

4. On peut aussi définir une catégorie abélienne comme une catégorie additive admettant noyaux et conoyaux et vérifiant: pour tout morphisme $f : X \to Y$ le morphisme $\mathrm{Coim}\, f \to \mathrm{Im}\, f$ est un isomorphisme.

5. Si $\mathcal{C}$ est une catégorie abélienne alors $\mathcal{F}\mathrm{un}(I, \mathcal{C})$ aussi.

6. On dit que le diagramme $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ avec $gf = 0$ est exact si l'application induite $\mathrm{Im}\, f \to \mathrm{Ker}\, g$ est un isomorphisme.

Fin du cours du 15 septembre

7. Dans une catégorie abélienne, f est un monomorphisme si et seulement si $\mathrm{Ker}\, f \simeq 0$, f est un épimorphisme ssi $\mathrm{Coker}\, f \simeq 0$. Corollaire: f est un isomorphisme ssi f est un monomorphisme et un épimorphisme.

8. Définition de complexe de chaines exact, de suite exacte courte.

9. Si $\mathcal{C}$ est abélienne alors $Ch(\mathcal{C})$ aussi.

10. Théorème de Freyd-Mitchell (admis) toute petite catégorie abélienne est une sous-catégorie pleine d'une catégorie ${}_{\mathrm{R}}\mathrm{Mod}$ pour un certain anneau R.

Définition 2.1. *Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ des catégories abéliennes. Un foncteur additif $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ est exact s'il préserve les suites exactes courtes. Il est exact à gauche (à droite) s'il préserve les suites exactes à gauche (à droite). Un foncteur contravariant $G : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ est exact (à gauche, à droite) si le foncteur covariant associé $\mathcal{A}^{op} \to \mathcal{B}$ est exact (àgauche, à droite).*

Exemple les foncteurs $\mathrm{Hom}_R(M, -)$ et $\mathrm{Hom}_R(-, M)$ sont exacts à gauche.

2.3 Objets projectifs et injectifs

Définition 2.2. *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. Un objet P de $\mathcal{C}$ est dit projectif si pour tout diagramme*

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d, "\varphi"'] \\ a \arrow[r, "\epsilon"] & B \end{tikzcd}$$

avec ϵ épimorphisme il existe $\psi : P \to A$ tel que $\epsilon\psi = \varphi$.

Un objet J de $\mathcal{C}$ est injectif s'il est projectif dans $\mathcal{C}^{op}$.

Cas particulier des projectifs dans les R-modules (ce sont les facteurs directs de R-modules libres), et cas particulier lorsque R est un anneau principal. (ce sont les R-modules libres).

Définition: une catégorie a assez de projectifs si pour tout objet A de la catégorie il existe un projectif P et un épimorphisme $P \to A$.

2.4 Homologie

Dans cette partie on on se place dans la catégorie ${}_{\mathrm{R}}\mathrm{Mod}$, tout ceci pouvant s'adapter au cas des catégories abéliennes.

On présente les notions suivantes

1. Pour un complexe de chaines C, on définit le module des n-cycles $Z_n(C)$ et des n-bords $B_n(C)$ et le R-module d'homologie $H_n(C)$. Les R-modules d'homologie fournissent un foncteur $H : \mathrm{Ch}(R) \to \mathrm{Gr}(R)$
2. Définition: Un morphisme de complexes de chaines est un quasi-isomorphisme s'il induit un isomorphisme en homologie.

Proposition 2.3. *Les propositions suivantes sont équivalentes*

1. *(C_*, d_*) est un complexe de chaines exact*
2. *pour tout n, $H_n(C) = 0$*
3. *Le morphisme $0 \to C$ est un quasi-isomorphisme.*

Théorème 2.4. *Toute suite exacte courte de complexes de chaines induit une suite exacte longue en homologie; cette suite exacte longue est fonctorielle en les morphismes de suites exactes courtes de complexess de chaines.*

Corollaire 2.5. *Dans une suite exacte courte de complexes de chaines, si deux des trois complexes sont exacts, le troisième l'est aussi. Etant donne un morphisme de suites exactes courtes de complexes de chaines, si deux des trois morphismes impliqués sont des quasi-isomorphismes, le troisième l'est aussi.*

2.5 Homotopie

Définition 2.6. *Deux morphismes de complexes de chaines $f, g : K_* \to L_*$ sont* homotopes *s'il existe une famille de morphimes de R-modules $h_n : K_n \to L_{n+1}$ pour $n \in \mathbb{Z}$ tel que*

$$h_{n-1}d_n^K + d_{n+1}^L h_n = f_n - g_n, \forall n \in \mathbb{Z}$$

On note $f \simeq g$

Proposition 2.7. *L'homotopie entre morphismes de complexes de chaines est une relation d'équivalence.*

Théorème 2.8. *Si $f \simeq g$ alors pour tout $n \geq 0$ on a $H_n(f) = H_n(g)$.*

Définition 2.9. *On dit que $f : K_* \to L_*$ est une* équivalence d'homotopie *s'il existe $g : L_* \to K_*$ tel que $gf \simeq 1_{K_*}$ et $fg \simeq 1_{L_*}$. On dit alors que K et L sont homotopiquement équivalents.*

Fin du cours du 19 septembre

Corollaire 2.10. *Si f est une équivalence d'homotopie alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$ on a $H_n(f)$ est un isomorphisme.*

Définition 2.11. *Un complexe de chaines K_* est* contractile *si $Id_{K_*} \simeq 0$.*

Corollaire 2.12. *Si K_* est contractile alors il est exact.*

2.6 Complexes de cochaines

Notion de cohomologie à coefficients dans un R-module.

Théorème 2.13. *Soit G un R-module et $E : 0 \to K \to L \to M \to 0$ une suite exacte courte de complexes de chaines tel que pour tout n la suite exacte courte E_n est scindée. Il existe une suite exacte longue*

$$\ldots \to H^n(M, G) \to H^n(L, G) \to H^n(K, G) \to H^{n+1}(M, G) \to H^n(L, G) \ldots$$

3 Produit tensoriel

On fixe R, S, S' des anneaux non nécessairement commutatifs.

3.1 Définitions

Définition 3.1. *Un $R-S$-bimodule est un groupe abélien M muni d'une structure de R-module à gauche et d'une structure de S-module à droite satisfaisant la propriété*

$$(r \cdot m) \cdot s = r \cdot (m \cdot s), \forall r \in R, m \in M, s \in S.$$

Définition 3.2. *Soit $M \in \mathrm{Mod_R}$, $N \in {}_{\mathrm{R}}\mathrm{Mod}$ et G un groupe abélien. Une application $f : M \times N \to G$ est R-quasi-bilinéaire si elle est bilinéaire et si de plus*

$$f(m \cdot r, n) = f(m, r \cdot n), \forall r \in R, m \in M, n \in N.$$

Théorème 3.3. *Il existe un groupe abélien, noté $M \otimes_R N$ et un morphisme R-quasibilinéaire $\varphi : M \times N \to M \otimes_R N$ vérifiant la propriété suivante: pour tout morphisme $f : M \times N \to G$ R-quasibilinéaire, il existe un unique morphisme de groupes abéliens $\tilde{f} : M \otimes_R N \to G$ tel que $\tilde{f} \circ \varphi = f$.*

Remarque. *Le couple* $(M \otimes_R N, \varphi)$ *vérifiant la propriété universelle est unique à unique isomorphisme près. Cela permet de démontrer que Si* $M \in {}_S\mathrm{Mod}_R$ *et* $N \in {}_R\mathrm{Mod}_{S'}$ *alors* $M \otimes_R N \in {}_S\mathrm{Mod}_{S'}$*, avec les structures suivantes*

$$s \cdot (m \otimes n) = (s \cdot m) \otimes n; \quad (m \otimes n) \cdot s' = m \otimes (n \cdot s').$$

En particulier si R *est un anneau commutatif, alors* $M \otimes_R N$ *est muni d'une structure de* R*-module.*

Théorème 3.4. *On a des isomorphismes de* R*-modules à gauche* $R \otimes_R N \tilde{\to} N$ *et de* R*-modules à droite* $M \otimes_R R \tilde{\to} M$*.*

3.2 Le produit tensoriel vu comme adjonction

Soient $M \in \mathrm{Mod_R}$ et $N \in {}_\mathrm{R}\mathrm{Mod}$ Les produits tensoriels $M \otimes_R -$ et $- \otimes_R N$ définissent des foncteurs

$$M \otimes_R - : {}_\mathrm{R}\mathrm{Mod} \to \mathcal{A}\mathrm{b} \text{ et } - \otimes_R N : \mathrm{Mod_R} \to \mathcal{A}\mathrm{b}$$

Théorème 3.5. *Les foncteurs définis ci-dessus sont adjoints à gauche de*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}\mathrm{b}}(M, -) : \mathcal{A}\mathrm{b} \to {}_\mathrm{R}\mathrm{Mod} \text{ et } \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}\mathrm{b}}(N, -) : \mathcal{A}\mathrm{b} \to \mathrm{Mod_R}$$

respectivement.

Conclusion: les foncteurs $M \otimes_R -$ et $- \otimes_R N$ préservent les colimites; de plus ils sont additifs, donc ils sont exacts à droite. Ils ne sont pas nécessairement exacts à gauche;

Définition 3.6. *On dit que* $M \in \mathrm{Mod_R}$ *(*$N \in {}_\mathrm{R}\mathrm{Mod}$*) est plat si le foncteur* $M \otimes_R -$ *(*$- \otimes_R N$*) est exact.*

Proposition 3.7. *Tout module projectif est plat*

Proof. La démonstration utilise le fait que si $(F_i : \mathcal{A} \to \mathcal{B})_{\rangle \in \mathcal{I}}$ est une famille de foncteurs additifs entre deux catégories abéliennes alors

$$\oplus_{i \in I} F_i \text{ est exact si et seulement si } \forall i \in I,\ F_i \text{ est exact.}$$

□

3.3 Produit tensoriel de bimodules

Toute la section précédente se généralise aux bimodules: Les adjonctions sont encore valables au sens où le foncteur

$$M \otimes_R - : {}_R\mathrm{Mod}_{S'} \to {}_S\mathrm{Mod}_{S'}$$

qui à N associe $M \otimes_R N$ est adjoint à gauche du foncteur

$${}_S\mathrm{Mod}_{S'} \to {}_R\mathrm{Mod}_{S'}$$

qui à U associe $\mathrm{Hom}_{S\mathrm{Mod}}(M, U)$; la structure de (R, S')-bimodule est donnée par

$$(r \cdot f)(m) = f(m \cdot r),\ (f \cdot s)(m) = f(m) \cdot s$$

Fin du cours du 22 septembre

On a ainsi un bifoncteur

$$-\otimes_R - : \ {}_S\mathrm{Mod}_R \times \ {}_R\mathrm{Mod}_{S'} \to \ {}_S\mathrm{Mod}_{S'}$$

qui à (M, N) associe $M \otimes_R N$ et qui à (f, g) morphismes de bimodules associe

$$(f \otimes g)(m \otimes n) := f(m) \otimes g(n)$$

On vérifie aisément que

$$\begin{aligned}(f_1 \otimes g_1) \circ (f_2 \otimes g_2) =&(f_1 \circ f_2) \otimes (g_1 \circ g_2)\\ (f_1 + f_2) \otimes g =&f_1 \otimes g + f_2 \otimes g\\ f \otimes (g_1 + g_2) =&f \otimes g_1 + f \otimes g_2\end{aligned}$$

Proposition 3.8 (Associativité du produit tensoriel)**.** *Soient S, R, T, U des anneaux, $M \in {}_S\mathrm{Mod}_R, N \in \ {}_R\mathrm{Mod}_T, P \in \ {}_T\mathrm{Mod}_U$ des bimodules; Les (S, U)-bimodules*

$$(M \otimes_R N) \otimes_T P \text{ et } M \otimes_R (N \otimes_T P)$$

sont isomorphes, et cet isomorphisme est naturel en M, N, P.

3.4 Algèbre, algèbre tensorielle, algèbre symétrique

Définition 3.9. *Soit k un anneau commutatif. Une k-algèbre A est la donnée d'un k-module A muni de morphismes de k-modules $\mu : A \otimes_k A \to A$ (appelé produit) et $\eta : k \to A$ (appelé unité) vérifiant les conditions*

$$\text{d'associativité: } \mu(1 \otimes \mu) = \mu(\mu \otimes 1) \text{ et } \text{ d'unité: } \mu(\eta \otimes 1) = \mu(1 \otimes \eta) = id_A$$

Un morphisme de k-algèbres $A \to B$ est un morphisme de k-modules respectant les morphismes produit et unité.

On note généralement $a \cdot b = \mu(a \otimes b)$ pour tout $a, b \in A$ et $\eta(1_k) = 1_A$.

Théorème 3.10. *Soient A et B deux k-algèbres. Il existe une unique structure de k-algèbre sur $A \otimes_k B$ tels que les morphismes $A \to A \otimes_k B$ qui à a associe $a \otimes 1_b$ et $B \to A \otimes B$ qui à b associe $1_A \otimes b$ soient des morphismes de k-algèbres.*

Le produit est alors donné par $(a \otimes b) \cdot (a' \otimes b') = (a \cdot a') \otimes (b \cdot b')$.

Théorème 3.11. *Le foncteur oubli $\mathcal{U} : \{k - \text{algèbres}\} \to \{k - \text{modules}\}$ admet un adjoint à gauche noté T. Pour tout k-module V on a*

$$T(V) = k \oplus \oplus_{n \geq 1} V^{\otimes_k n}.$$

$T(V)$ est appelé algèbre tensorielle engendrée par V.

Remarque. *On peut définir la notion de k-algèbre commutative. Le foncteur oubli des k-algèbres commutatives dans les k-modules admet un adjoint à gauche S. $S(V)$ est l'algèbre symétrique*

$$S(V) = T(V)/ < v \otimes w - w \otimes v >$$

bilbiography
MLCat: categories for the working mathematician, saunders mac lane
MLHom: Homology, saunders mac lane
W: weibel , an introduction to homological algebra
CE: Cartan Eilenberg, homological algebra
HS: Hilton Stammbach, a course in homological algebra