M2 **Université Paris Diderot**
2017/2018

Algèbre Homologique et Topologie Algébrique
Chapitre 2–Foncteurs dérivés–Tor et Ext

1 Résolutions

Dans cette partie nous donnons uniquement les définitions et les théorèmes principaux du cours. Pour les démonstrations, on pourra se référer soit au livre de Weibel, soit au polycopié de Julien Bichon et Rachel Taillefer disponible à l'adresse "math.univ-bpclermont.fr/∼taillefer/Cours.pdf"

1.1 Résolutions projectives

Pour les démonstrations (parfois les énoncés), on se place dans la catégorie ${}_{\mathrm{R}}\mathrm{Mod}$. Cependant les résultats restent valables dans une catégorie abélienne $\mathcal{A}$.

Définition 1.1. Une catégorie $\mathcal{A}$ a *assez de projectifs* si pour tout objet M de $\mathcal{A}$ il existe un objet projectif P et un épi $f : P \to M$

Par exemple les catégories ${}_{\mathrm{R}}\mathrm{Mod}$, $\mathrm{Mod}_{\mathrm{R}}$ ont assez de projectifs.

Définition 1.2. Soit M un objet de $\mathcal{A}$. Une *résolution à gauche de* M est un complexe $(P_n)_{n\geq 0}$ de $\mathrm{Ch}(\mathcal{A})_{\geq 0}$ muni d'un morphisme $\epsilon : P_0 \to M$ tel que le complexe augmenté de

$$P_0 \xrightarrow{\epsilon} P_{-1} = M \text{ et } P_m = 0, \forall m < -1$$

est exact. Une résolution est dite projective si pour tout $n \geq 0$, P_n est un objet projectif.

Lemme 1.3. *Si $\mathcal{A}$ est une catégorie abélienne ayant assez de projectifs, alors tout objet de $\mathcal{A}$ admet une résolution projective.*

1.2 Résolutions injectives

Définition 1.4. Une catégorie $\mathcal{A}$ a *assez d'injectifs* si pour tout objet M de $\mathcal{A}$ il existe un objet injectif I et un mono $f : M \to I$

Lemme 1.5. *Les catégories ${}_{\mathrm{R}}\mathrm{Mod}$, $\mathrm{Mod}_{\mathrm{R}}$ ont assez d'injectifs.*

Proof. Pour démontrer ce lemme, on utilise le résultat de TD

Lemme 1.6. *Si R est principal, on a l'équivalence*

M est un R-module injectif si et seulement si M est divisible.

On rappelle que M est divisible si

$$\forall m \in M, \forall a \in R \setminus \{0\}, \exists m' \in M, am' = m.$$

Exemples: $\mathbb{Z}$ n'est pas un $\mathbb{Z}$-module injectif, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ sont des modules injectifs.
Plusieurs corollaires à ce lemme

Corollaire 1.7. *Soit R un anneau principal.*

1. *Tout quotient d'un R-module injectif est injectif.*

2. Tout $\mathbb{Z}$-module est un sous-$\mathbb{Z}$-module d'un module injectif.

Ce corollaire permet de démontrer

Proposition 1.8. *Tout R-module est un sous R-module d'un module injectif.*

Ce qui finit la démonstration $\square$

Définition 1.9. Soit M un objet de $\mathcal{A}$. Une *résolution à droite de M* est un complexe de cochaines $(I^n)_{n\geq 0}$ de $\mathrm{Ch}(\mathcal{A})^{\geq 0}$ muni d'un morphisme $\iota : M \to I^0$ tel que le complexe augmenté de

$$\forall m < -1, I^m = 0, \text{ et } I^{-1} = M \xrightarrow{\iota} I^0,$$

est exact. Une résolution est dite injective si pour tout $n \geq 0$, I^n est un objet injectif.

Lemme 1.10. *Si $\mathcal{A}$ est une catégorie abélienne ayant assez d'injectifs, alors tout objet de $\mathcal{A}$ admet une résolution injective.*

1.3 Propriétés des résolutions

1.3.1 Cas projectif

Théorème 1.11. *Soient C et D deux objets de $\mathrm{Ch}(\mathcal{A})_{\geq 0}$. On suppose que C_i est projectif pour tout $i \geq 0$. On suppose également que $H_n(D) = 0, \forall n \geq 1$.*

Pour tout $\overline{\varphi_0} : H_0(C) \to H_0(D)$, il existe un morphisme de complexes de chaines $\varphi : C \to D$ tel que $H_0(\varphi) = \overline{\varphi_0}$.

De plus φ est unique à homotopie près.

Corollaire 1.12. *Soit $\overline{f} : M \to N$ un morphisme de R-modules, $P_\bullet \to M$ et $Q_\bullet \to N$ des résolutions projectives. Il existe un morphisme de complexes $f : P \to Q$, unique à homotopie près tel que $H_0(f) = \overline{f}$.*

En particulier deux résolutions projectives de M sont homotopiquement équivalentes.

Lemme 1.13 (Lemme dit du fer à cheval)**.** *On se donne une suite exacte courte de R-modules*

$$0 \to M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0$$

Soient

$$P' \xrightarrow{\epsilon'} M' \qquad \text{et} \qquad P'' \xrightarrow{\epsilon''} M''$$

des résolutions projectives de M' et M'' respectivement. Soit P défini par $P_n = P'_n \oplus P''_n$ et $\iota'_n : P'_n \to P_n$ l'inclusion canonique et $\pi''_n : P_n \to P''_n$ la projection canonique. Il existe une differentielle sur P tel que le le complexe ainsi obtenu soit une résolution de M et tel que ι' soit un relèvement de f et π'' un relèvement de g.

`Fin du cours du 26 septembre 2017`

1.3.2 Cas injectif

Voici l'énoncé analogue dans le cadre injectif:

Théorème 1.14. *Soient C et D deux objets de $\mathrm{Ch}(\mathcal{A})^{\geq 0}$. On suppose que $H^n(C) = 0, \forall n \geq 1$ et on suppose que pour tout $i \geq 0$, D_i est injectif.*

Pour tout $\psi : H^0(C) \to H^0(D)$, il existe un morphisme de complexes de cochaines $\varphi : C \to D$ tel que $H^0(\varphi) = \psi$.

De plus φ est unique à homotopie près.

Corollaire 1.15. *Soit $g : M \to N$ un morphisme de R-modules, $M \to I^\bullet$ et $N \to J^\bullet$ des résolutions injectives de M et N respectivement. Il existe un morphisme de complexes de cochaines $f : I \to J$, unique à homotopie près tel que $H^0(f) = g$.*

En particulier deux résolutions injectives de M sont homotopiquement équivalentes.

Lemme 1.16. *Il y a un analogue du lemme du fer à cheval pour les résolutions injectives.*

2 Foncteurs dérivés

Cette section s'inspire plutôt du livre de Hilton-Stammbach.

2.1 Foncteurs dérivés à gauche

Soit $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un foncteur additif entre deux catégories abéliennes. On suppose que $\mathcal{A}$ a assez de projectis. On se fixe A un objet de $\mathcal{A}$ et P une résolution projective de A.

Proposition 2.1.

1. *$F(P)$ est un complexe de chaines.*
2. *$H_i(F(P))$ ne dépend pas de la résolution projective P de A. On note cet objet $L_iF(A)$.*
3. *Si A est projectif, $L_iF(A) = 0, \forall i \geq 1$.*

Remarque. *Soit $\overline{f} : A \to B$ un morphisme dans $\mathcal{A}$. D'après le lemme de relèvement, il existe un relèvement $f : P \to Q$ de $\overline{f}$ pour P et Q des résolutions projectives de A et B respectivement. Ce relèvement induit une application $H_i(F(P)) \overset{H_iF(f)}{\to} H_i(F(Q))$ qui ne dépend pas du relèvement choisi. Ainsi L_iF définit un foncteur de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{B}$.*

Théorème 2.2. *Le foncteur $L_iF : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ est additif.*

Définition 2.3. Le foncteur L_iF s'appelle le *i-ème foncteur dérivé à gauche* de F.

Proposition 2.4. *Si F est un foncteur exact à droite, $L_0F(A)$ est isomorphe à $F(A)$ pour tout A objet de $\mathcal{A}$.*

Théorème 2.5. *Soit*

$$0 \to A' \overset{f}{\to} A \overset{g}{\to} A'' \to 0$$

une suite exacte courte dans $\mathcal{A}$. On suppose que $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ est un foncteur additif exact à droite. Il existe une suite exacte longue dans $\mathcal{B}$

$$\ldots \to L_nF(A') \to L_nF(A) \to L_nF(A'') \overset{\partial}{\to} L_{n-1}F(A') \to \ldots$$

$$\ldots \to L_1F(A'') \overset{\partial}{\to} F(A') \to F(A) \to F(A'') \to 0$$

de plus cette suite exacte est naturelle.

Théorème 2.6. *Soit $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un foncteur additif entre deux catégories abéliennes, exact à droite. Les propositions suivantes sont équivalentes*

1. *F est un foncteur exact.*
2. *Pour tout $i \geq 1$, pour tout $A \in \mathcal{A}$, $L_iF(A) = 0$.*
3. *Pour tout $A \in \mathcal{A}$, $L_1F(A) = 0$.*

2.2 Foncteurs dérivés à droite

Soit $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un foncteur additif entre deux catégories abéliennes. On suppose que $\mathcal{A}$ a assez d'injectifs. On se fixe A un objet de $\mathcal{A}$ et I une résolution injective de A.

Proposition 2.7. *1. $F(I)$ est un complexe de cochaines.*

2. $H_i(F(I))$ ne dépend pas de la résolution injective I de A. On note cet objet $R^iF(A)$.

3. Si A est injectif, $R^iF(A) = 0, \forall i \geq 1$.

Remarque. *De la même manière que pour les résolutions à gauche, on montre que R^iF peut être étendu en un foncteur.*

Théorème 2.8. *Le foncteur $R^iF : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ est additif.*

Définition 2.9. Le foncteur R^iF s'appelle le *i-ème foncteur dérivé à droite* de F.

Proposition 2.10. *Si F est un foncteur exact à gauche, $R^0F(A)$ est isomorphe à $F(A)$ pour tout A objet de $\mathcal{A}$.*

Théorème 2.11. *Soit*

$$0 \to A' \xleftarrow{f} A \xleftarrow{g} A'' \leftarrow 0$$

une suite exacte courte dans $\mathcal{A}$. On suppose que $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ est un foncteur additif exact à gauche. Il existe une suite exacte longue dans $\mathcal{B}$

$$\ldots \leftarrow R^nF(A') \leftarrow R^nF(A) \leftarrow R^nF(A'') \xleftarrow{\partial} R^{n-1}F(A') \leftarrow \ldots$$

$$\ldots \leftarrow R^1F(A'') \xleftarrow{\partial} F(A') \leftarrow F(A) \leftarrow F(A'') \leftarrow 0$$

de plus cette suite exacte est naturelle.

Théorème 2.12. *Soit $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un foncteur additif entre deux catégories abéliennes, exact à gauche. Les propositions suivantes sont équivalentes*

1. F est un foncteur exact.

2. Pour tout $i \geq 1$, pour tout $A \in \mathcal{A}$, $R^iF(A) = 0$.

3. Pour tout $A \in \mathcal{A}$, $R^1F(A) = 0$.

2.3 Foncteurs dérivés de foncteurs contravariants

Rappel: si $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ est un foncteur additif contravariant entre deux catégories abéliennes, on dit que F est exact à gauche (resp. à droite) s'il est exact à gauche (resp. à droite) lorsqu'il est considéré comme un foncteur covariant $F : \mathcal{A}^{op} \to \mathcal{B}$. Plus précisément, F est exact à gauche si et seulement si pour toute suite exacte dans $\mathcal{A}$

$$0 \to A'' \to A \to A' \to 0$$

on a

$$0 \to F(A') \to F(A) \to F(A'')$$

est exacte.

Définition 2.13. *1. Soit $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un foncteur additif contravariant exact à gauche, A un objet de $\mathcal{A}$ le foncteur dérivé à droite de F noté R^iF est défini sur les objets par*

$$R^iF(A) = H^i(F(P))$$

où P est une résolution projective de A dans $\mathcal{A}$

2. Soit $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un foncteur additif contravariant exact à droite, B un objet de $\mathcal{A}$ le foncteur dérivé à gauche de F noté L_iF est défini sur les objets par

$$L_iF(B) = H_i(F(I))$$

où I est une résolution injective de B dans $\mathcal{A}$

Toutes les propriétés énoncées sur les foncteurs dérivés de foncteurs covariants sont donc valables pour les foncteurs dérivés de foncteurs contravariants.

`Le théorème suivant a été traité en cours le 3 octobre`

Théorème 2.14. *F un foncteur additif qui préservetous les coproduits alors L_*F commute aux coproduits.*

3 Foncteur Ext

3.1 Via les résolutions injectives

On se place ici dans la catégorie ${}_{\mathrm{R}}\mathrm{Mod}$ ou $\mathrm{Mod}_{\mathrm{R}}$.

Définition 3.1. *Soit A un objet de ${}_{\mathrm{R}}\mathrm{Mod}$. Le foncteur $\mathrm{Hom}_R(A, -)$ est exact à gauche et l'on note*

$$\mathrm{Ext}^i_R(A, B) = (R^i \mathrm{Hom}_R(A, -))(B)$$

Exemple de calculs:

Si $R = \mathbb{Z}$ et M est un groupe abélien de torsion on utilise la résolution injective de $\mathbb{Z}$ donnée par

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{\eta} \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to 0$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Ext}^i_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Z}) &= 0, \text{ pour } i \neq 1 \\ \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Z}) &= \mathrm{Hom}_R(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}). \end{aligned}$$

3.2 Via les résolutions projectives

Le théorème ci-dessous est admis, on pourra trouver une démonstration dans le livre de Weibel.

Théorème 3.2. *Soient A, B des objets de ${}_{\mathrm{R}}\mathrm{Mod}$. Le foncteur $\mathrm{Hom}_R(-, B)$ est contravariant et exact à gauche. On a*

$$\mathrm{Ext}^i_R(A, B) = (R^i \mathrm{Hom}_R(-, B))(A)$$

3.3 Propriétés

Les propriétés suivantes sont des corollaires du théorème 2.12.

Proposition 3.3. *Les propositions suivantes sont équivalentes*

1. *A est projectif.*
2. *Le foncteur $\mathrm{Hom}_R(A, -)$ est exact.*
3. $\forall i \geq 1, \forall B \in {}_{\mathrm{R}}\mathrm{Mod}, \mathrm{Ext}^i_R(A, B) = 0.$
4. $\forall B \in {}_{\mathrm{R}}\mathrm{Mod}, \mathrm{Ext}^1_R(A, B) = 0.$

Proposition 3.4. *Les propositions suivantes sont équivalentes*

1. *B est injectif.*
2. *Le foncteur $\mathrm{Hom}_R(-, B)$ est exact.*
3. $\forall i \geq 1, \forall A \in {}_{\mathrm{R}}\mathrm{Mod}, \mathrm{Ext}^i_R(A, B) = 0.$
4. $\forall A \in {}_{\mathrm{R}}\mathrm{Mod}, \mathrm{Ext}^1_R(A, B) = 0.$

3.4 Lien entre $\mathrm{Ext}^1_R(A, B)$ et extensions de A par B

Voir l'énoncé de l'exercice 3 feuille de TD4. `Traité en cours le 3 octobre, exercice à chercher pour le 6 octobre`

4 Foncteur Tor

On se place ici dans la catégorie ${}_{\mathrm{R}}\mathrm{Mod}$ ou $\mathrm{Mod}_{\mathrm{R}}$ ou ${}_S\mathrm{Mod}_{S'}$ avec S et S' des anneaux. En général $A \in {}_S\mathrm{Mod}_R$ et $B \in {}_R\mathrm{Mod}_{S'}$ de telle manière que $A \otimes_R B \in {}_S\mathrm{Mod}_{S'}$.

Définition 4.1. *Soit B un objet de ${}_{\mathrm{R}}\mathrm{Mod}$. Le foncteur $- \otimes_R B$ est exact à droite et le groupe abélien $\mathrm{Tor}^R_i(A, B)$ est défini comme*

$$\mathrm{Tor}^R_i(A, B) = (L_i(- \otimes_R B))(A)$$

Plus généralement, pour B un objet de ${}_R\mathrm{Mod}_{S'}$ et $A \in_S \mathrm{Mod}_R$ le (S, S')-bimodule $\mathrm{Tor}^R_i(A, B)$ est défini comme

$$\mathrm{Tor}^R_i(A, B) = (L_i(- \otimes_R B))(A)$$

Théorème 4.2 (admis)**.** *Pour tout A, B on a*

$$L_n(- \otimes_R B)(A) \simeq L_n(A \otimes_R -)(B) = \mathrm{Tor}^R_n(A, B)$$

Exemples:

$$\mathrm{Tor}^{\mathbb{Z}}_i(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, B) = \begin{cases} B/pB, & \text{si } i = 0, \\ {}_pB, & \text{si } i = 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

où ${}_pB = \{x \in B | px = 0\}$.

`Fin du cours du 29 septembre`

Traité en cours: le calcul de $\mathrm{Tor}^{\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}}_i(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}, B)$ où d divise m.

Proposition 4.3. *Les propositions suivantes sont équivalentes*

1. *B est plat.*
2. *Le foncteur $-\otimes_R B$ est exact.*
3. *$\forall i \geq 1, \forall A \in \mathrm{Mod_R}, \mathrm{Tor}_i^R(A,B)=0$.*
4. *$\forall A \in \mathrm{Mod_R}, \mathrm{Tor}_1^R(A,B)=0$.*

5 Utilisation des foncteurs dérivés pour le calcul de l'homologie de complexes

5.1 Produit tensoriel de complexes

Proposition 5.1. *Soient (C,δ^C) et (D,δ^D) des complexes de chaines. Soit*

$$(C\otimes D)_n = \oplus_{i+j=n} C_i \otimes D_j$$

et

$$\delta(c\otimes d) = \delta^C(c)\otimes d + (-1)^i c\otimes \delta^D(d), c\in C_i$$

Alors $(C\otimes D,\delta)$ est un complexe de chaines. On a de plus un morphisme naturel de groupes abéliens

$$p : H_*(C)\otimes_R H_*(D) \to H_*(C\otimes_R D)$$

Théorème 5.2 (Formule de Künneth)**.** *Soient C et D deux complexes de chaines. Si les R-modules des cycles $Z_n(C)$ et des bords $B_n(C)$ sont plats alors on a une suite exacte courte, pour tout $n\in\mathbb{Z}$*

$$0 \to \oplus_{p+q=n} H_p(C)\otimes_R H_q(D) \xrightarrow{p} H_n(C\otimes_R D) \to \oplus_{p+q=n-1}\mathrm{Tor}_1^R(H_p(C),H_q(D))$$

Remarque. *Soit C un complexe de chaines de R-modules. On suppose que pour tout n le R-module $B_n(C)$ est plat. On a alors l'équivalence*

$$\forall n, C_n \text{ est plat} \Longleftrightarrow \forall n, Z_n(C) \text{ est plat.}$$

On applique souvent la formule de Künneth dans le cas où R est un anneau principal et C_n est un module projectif (donc libre). On a alors $B_n(C)$ et $Z_n(C)$ sont libres.

Théorème 5.3 (Théorème des coefficients universels pour la cohomologie)**.** *Soient $C\in \mathrm{Ch}({}_{\mathrm{R}}\mathrm{Mod})$ et $A\in {}_{\mathrm{R}}\mathrm{Mod}$. On suppose que pour tout $n\in\mathbb{Z}$, les R-modules C_n et $Z_n(C)$ sont projectifs. On a une suite exacte courte*

$$0\to \mathrm{Ext}_R^1(H_{n-1}(C),A) \to H^n\,\mathrm{Hom}_R(C,A) \to \mathrm{Hom}_R(H_n(C),A)\to 0$$

Terminologie. Soit $C\in \mathrm{Ch}({}_{\mathrm{R}}\mathrm{Mod})$, $A\in {}_{\mathrm{R}}\mathrm{Mod}$ et $B\in \mathrm{Mod_R}$. Les groupes d'homologie $H_n(B\otimes C)$ s'appellent homologie de C à coefficients dans B et les groupes de cohomologie $H^n(\mathrm{Hom}_R(C,A))$ s'appellent cohomologie de C à coefficients dans A.