M2 **Université Paris Diderot**
2016/2017 Cours du 4 octobre 2016

Algèbre Homologique et Topologie Algébrique
Chapitre 3–Applications des foncteurs dérivés à certaines théories cohomologiques.

1 Méthodes pour obtenir des complexes projectifs

1.1 Modules libres

Les propriétés d'adjonction du produit tensoriel nous permettent d'énoncer la proposition suivante.

Proposition 1.1. *Soient S et S' des anneaux. Le foncteur d'oubli ${}_S\mathrm{Mod}_{S'} \to \mathrm{Set}$ admet un adjoint à gauche*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Set} & \to & {}_S\mathrm{Mod}_{S'} \\ X & \to & S \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[X] \otimes_{\mathbb{Z}} S' \end{array}$$

Le $S - S'$-bimodule $S \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[X] \otimes_{\mathbb{Z}} S'$ est le $S - S'$-bimodule libre engendré par X. Il vérifie la propriété universelle suivante: pour toute application (d'ensembles) $f : X \to M$ où X est un ensemble et $M \in_S \mathrm{Mod}_{S'}$, il existe un unique morphisme de $S - S'$-bimodules $\tilde{f} : S \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[X] \otimes_{\mathbb{Z}} S' \to M$ tel que $\tilde{f} \circ i = f$ où $i : X \to S \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[X] \otimes_{\mathbb{Z}} S'$ est l'application qui à x associe $1 \otimes x \otimes 1$.

Remarque. Cas particuliers: si $S = \mathbb{Z}$ le S'-module à droite libre engendré par X est $\mathbb{Z}[X] \otimes_{\mathbb{Z}} S'$; si $S' = \mathbb{Z}$, le S-module à gauche libre engendré par X est $S \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[X]$; si $S = S' = \mathbb{Z}$, le groupe abélien libre engendré par X est $\mathbb{Z}[X]$.

On remarque également que $\mathbb{Z}[X \times Y] \simeq \mathbb{Z}[X] \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[Y]$ (voir TD3 exercice 1).

1.2 Objets simpliciaux

Définition 1.2. *On définit la catégorie Δ comme suit:*

1. *Les objets de Δ sont en bijection avec $\mathbb{N}$. On note $[n], n \in \mathbb{N}$ un objet de Δ.*
2. *$f \in \Delta([n],[m])$ si et seulement si f est une application croissante de $\{0, 1, \ldots, n\}$ dans $\{0, 1, \ldots m\}$.*

La composition des morphismes est donnée par la composition usuelle d'applications.

Pour $f \in \Delta([n],[m])$, on notera, par abus de notation, $f = (f(0), \ldots, f(n))$ la suite croissante de ses images. On peut montrer que les morphismes sont engendrés par les morphismes faces $\epsilon_i^n : [n-1] \to [n]$, pour $0 \leq i \leq n$ et dégénérescences $\eta_j^n : [n+1] \to [n]$ pour $0 \leq j \leq n$, au sens où tout morphisme se décompose en composition de morphismes faces et dégénérescences. On peut se référer au libre de Weibel, chapitre 8, pour la description des relations entre ces morphismes. Par définition

$$\epsilon_i^n = (0, 1, \ldots, \hat{i}, \ldots, n), \qquad \eta_j^n = (0, 1, \ldots, j, j, \ldots, n)$$

Définition 1.3. *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. Un objet simplicial dans $\mathcal{C}$ est un foncteur $X : \Delta^{op} \to \mathcal{C}$. Un morphisme entre objets simpliciaux X et X' est une transformation naturelle entre X et X'. Cela définit une catégorie que l'on note $s\mathcal{C}$.*

Proposition 1.4. *La donnée d'un objet simplicial X dans $\mathcal{C}$ est équivalente à*

- *La donnée d'objets X_n de $\mathcal{C}$ pour $n \in \mathbb{N}$.*
- *La donnée, pour tout $n \in \mathbb{N}$, de morphismes appelés faces $d_i = X_n \to X_{n-1}$ pour $0 \leq i \leq n$ et la donnée, pour tout $n \in \mathbb{N}$, de morphismes appelés dégénérescences $s_j : X_n \to X_{n+1}$ pour $0 \leq j \leq n$ satisfaisant*

$$\begin{aligned} d_i d_j &= d_{j-1} d_i, \qquad i < j \\ s_i s_j &= s_{j+1} s_i, \qquad i \leq j \\ s_i d_j &= \begin{cases} d_{j-1} s_j, & si\ i < j \\ id, & si\ i = j\ ou\ i = j+1 \\ s_j d_{i-1}, & si\ i > j+1 \end{cases} \end{aligned}$$

La donnée d'un morphisme entre objets simpliciaux est équivalente à la donnée de morphismes $f_n \in \mathcal{C}(X_n, X'_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ qui commutent aux applications d_i et s_j.

Proposition 1.5. *Si $\mathcal{A}$ est une catégorie abélienne, on a un foncteur $(s\mathcal{A}) \to \mathrm{Ch}(\mathcal{A})_{\geq 0}$ qui à tout objet simplicial X associe le complexe $(X_n, d))$ donné par $d = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i d_i$, et qui à tout morphisme $f : X \to X'$ associe le morphisme de complexes de chaines $f_n : X_n \to X'_n$.*

2 Cohomologie des groupes

Dans toute cette section on se fixe un groupe G.

2.1 L'anneau de groupe $\mathbb{Z}[G]$

Définition 2.1. *On définit l'anneau $\mathbb{Z}[G]$ comme étant le groupe abélien libre muni de la multiplication donnée par*

$$(\sum_g n_g \cdot g)(\sum_h m_h \cdot h) = \sum_k \sum_{gh=k} n_g m_h \cdot k, \qquad n_g, m_h \in \mathbb{Z}.$$

L'unité de l'anneau est donnée par e_G.

Remarque. On remarque que cette multiplication est induite par l'application d'ensembles $G \times G \to G$ qui à (g, h) associe gh. En effet, par propriétés d'adjonctions, se donner une application d'ensembles $G \times G \to \mathbb{Z}[G]$ est équivalente à se donner un morphisme de groupes abéliens de $\mathbb{Z}[G] \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[G] \to \mathbb{Z}[G]$, qui est équivalent à se donner une application bilinéaire de $\mathbb{Z}[G] \times \mathbb{Z}[G] \to \mathbb{Z}[G]$. Donc la multiplication définie ci-dessus est bien distributive par rapport à l'addition et est associative.

Proposition 2.2. *Soit $i : G \to \mathbb{Z}[G]$ l'application qui à g associe g. Le couple (G, i) vérifie la propriété universelle suivante: pour tout anneau R pour toute application $f : G \to R$ multiplicative, c'est-à-dire $f(gg') = f(g)f(g')$ et $f(e_G) = 1_R$, il existe un unique morphisme d'anneaux $\tilde{f} : \mathbb{Z}[G] \to R$ tel que $\tilde{f} i = f$.*

Définition 2.3. *Un groupe abélien A est un G-module à gauche (à droite) si A est un $\mathbb{Z}[G]$-module à gauche (à droite).*

Remarque. Soit A un groupe abélien, on note $\mathrm{Aut}(A)$ l'ensemble des morphismes de groupes abéliens $f : A \to A$ bijectifs. La donnée d'une structure de $\mathbb{Z}[G]$-module à gauche sur A équivaut à la donnée d'un morphisme de groupes $G \to \mathrm{Aut}(A)$.

Lemme 2.4. *On considère $\mathbb{Z}$ comme un G-module à gauche (à droite) trivial: $g \cdot \alpha = \alpha, \forall g \in G, \alpha \in \mathbb{Z}$ ($\alpha \cdot g = \alpha, \forall g \in G, \alpha \in \mathbb{Z}$.) Le morphisme d'augmentation $\epsilon : \mathbb{Z}[G] \to \mathbb{Z}$ qui à $\sum_g n_g \cdot g$ associe $\sum_g n_g$ est un morphisme de G-modules à gauche (à droite).*

2.2 (Co)homologie des groupes à coefficients dans un module

Définition 2.5. *Soit A un G-module à gauche. On définit*

$$H^n(G,A) = \mathrm{Ext}^n_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z},A)$$
$$H_n(G,A) = \mathrm{Tor}_n^{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z},A)$$

Pour calculer la cohomologie, il faut donc connaitre une résolution projective (ou libre) de $\mathbb{Z}$ comme G-module trivial.

Exemple. On considère G le groupe à deux éléments $G = \{e,\tau\}$ avec $\tau^2 = e$. Une résolution libre de $\mathbb{Z}$ est donnée par le complexe

$$\ldots \to \mathbb{Z}[G] \xrightarrow{d^-} \mathbb{Z}[G] \xrightarrow{d^+} \mathbb{Z}[G] \xrightarrow{d^-} \mathbb{Z}[G] \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z}.$$

où

$$d^-(e) = e - \tau \qquad \text{et} \qquad d^+(e) = e + \tau.$$

Remarquons que ceci caractérise entièrement d^- et d^+ car ce sont des morphismes de G-modules; comme $\mathbb{Z}[G]$ est le G-module libre engendré par e on obtient

$$d^-(\tau) = d^-(\tau\cdot e) = \tau\cdot d^-(e) = \tau e - \tau\tau = \tau - e, \qquad d^+(\tau) = \tau + e.$$

2.3 La construction bar

On donne ici une méthode systématique pour construire une résolution libre de $\mathbb{Z}$ comme G-module trivial.

Définition 2.6. *On considère le foncteur $F : \Delta^{op} \to {}_{\mathbb{Z}[G]}\mathrm{Mod}$ qui à $[n]$ associe $\mathbb{Z}[G^{\times n+1}]$ et qui à $f : [n] \to [m]$ associe l'application*

$$F(f) : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z}[G^{\times m+1}] & \to & \mathbb{Z}[G^{\times n+1}] \\ (a_0,\ldots,a_m) & \mapsto & (b_0,\ldots,b_n) \end{array}$$

définie par $b_i = a_{f(i-1)+1}\cdot\ldots\cdot a_{f(i)}$ où par convention $f(-1) = -1$ et si $f(i-1) = f(i)$ alors $b_i = e_G$.

Proposition 2.7. *F est bien un foncteur. Il définit donc un objet simplicial dans la catégorie des G-modules. On obtient*

$$d_i(a_0,\ldots,a_n) = \begin{cases} (a_0,\ldots,a_i\cdot a_{i+1},\ldots,a_n), & si\ 0 \le i < n \\ (a_0,\ldots,a_{n-1}), & si\ i = n. \end{cases}$$

Remarque. Il faut montrer que

- $F([n])$ est un G-module
- $F(f)$ est bien un morphisme de G-modules.
- $F(id) = id$, $F(f\circ g) = F(f)\circ F(g)$.

`Cours du 7 octobre`

Notation: On note $B'_n(G) = \mathbb{Z}[G^{\times n+1}]$ et $d = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i d_i$.

Théorème 2.8. *Le complexe $B'_*(G)$ est une résolution libre du G-module $\mathbb{Z}$ vu comme G-module trivial. En particulier $H^n(G, A)$ peut être calculé en considérant le complexe*

$$C^n(G, A) = (\mathrm{Hom}_{\mathrm{Set}}(G^{\times n}, A), \delta)$$

où

$$(\delta f)(g_1, \dots, g_{n+1}) = g_1 \cdot f(g_2, \dots, g_{n+1}) + \sum_{i=1}^{n} (-1)^i f(g_1, \dots, g_i g_{i+1}, \dots, g_{n+1}) + (-1)^{n+1} f(g_1, \dots, g_n)$$

Proposition 2.9. *On a $H^1(G, A) = \mathrm{Der}(G, A)/\,\mathrm{Ider}(G, A)$*

2.4 Classification des extensions de groupes

Définition 2.10. Soit G un groupe, A un groupe abélien. Une *extension du groupe G par A* est une suite exacte courte de groupes

$$\mathcal{E} : \qquad 0 \to A \to E \to G \to 1$$

Lemme 2.11. *Toute extension de G par A induit une structure de $\mathbb{Z}[G]$-module sur A.*

Définition 2.12. *Soit A un $\mathbb{Z}[G]$-module. On note $E(G, A)$ l'ensemble des extensions de G par A induisant la structure de G-module existante sur A. Deux extensions $\mathcal{E}, \mathcal{E}' \in E(G, A)$ sont dites équivalentes s'il existe un morphisme $\varphi : E \to E'$ qui fait commuter les diagrammes. On note $\sim$ cette relation d'équivalence.*

Remarque. Noter que si A est un groupe abélien et si $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ sont deux extensions de G par A équivalentes alors la structure de G-module induite sur A par $\mathcal{E}$ est la même que celle induite par $\mathcal{E}'$.

Théorème 2.13. *L'ensemble $E(G, A)/\sim$ est en bijection avec $H^2(G, A)$.*

3 Cohomologie de Hochschild

Soit k un anneau commutatif et A une k-algèbre. On étend la notion de $R-S$-bimodules, où R, S sont des anneaux à la notion de $A-B$-bimodules où A et B sont des k-algèbres. Plus précisément un $A-B$-bimodule est un k-module M muni d'opérations $\lambda : A \otimes_k M \to M$ et $\rho : M \otimes_k A \to M$ compatibles avec la multiplication de A et l'unité de A. Par abus de langage on dira que M est un A-bimodule si M est un $A-A$-bimodule.

Définition 3.1. *Soit A une k-algèbre et M un A-bimodule. L'homologie de Hochschild de A à coefficients dans M est $H_n(A; M) = \mathrm{Tor}_n^{A-bimod}(A, M)$. La cohomologie de Hochschild de A à coefficients dans M est $H^n(A; M) = \mathrm{Ext}^n_{A-bimod}(A, M)$.*

De la même manière que pour la cohomologie des groupes, on construit un A-bimodule simplicial donné par

$$B'_n(A) = A \otimes_k A^{\otimes_k n} \otimes_k A$$

$$d_i(a_0, \dots, a_{n+1}) = a_0 \otimes \dots a_i \cdot a_{i+1} \otimes \dots \otimes a_{n+1},\ 0 \le i \le n$$

$$s_j(a_0, \dots, a_{n+1}) = a_0 \otimes \dots a_i \otimes 1_A \otimes a_{i+1} \otimes \dots \otimes a_{n+1},\ 0 \le i \le n$$

muni d'une augmentation donnée par la multiplication:

$$\epsilon : B_0(A) = A \otimes_k A \to A$$

Théorème 3.2. *Le complexe augmenté $\tilde{B}'(A)$ est contractile. Si A est un k-module libre alors $\tilde{B}'(A)$ est une résolution libre de A dans la catégorie des A-bimodules.*

Ainsi dans le cas où A est un k-module libre, on peut donner une description explicite d'un complexe $CH^n(A, M)$ qui calcule la cohomologie de A à coefficients dans M. On a

$$CH^n(A, M) = \mathrm{Hom}_{A-bimod}(B'_n(A), M) = \mathrm{Hom}_{k-mod}(A^{\otimes n}, M)$$

muni de la différentielle

$$(\delta f)(a_1 \otimes \ldots \otimes a_{n+1}) = a_1 \cdot f(a_2 \otimes \ldots \otimes a_{n+1}) + \sum_{i=1}^{n} (-1)^i f(a_1 \otimes \ldots \otimes a_i \cdot a_{i+1} \otimes \ldots \otimes a_{n+1}) + (-1)^{n+1} f(a_1 \otimes \ldots \otimes a_n) \cdot a_{n+1}.$$

Proposition 3.3.

$$H^0(A, M) = M^A = \{m \in M | \forall a \in A, a \cdot m = m \cdot a\}$$
$$H^0(A, A) = Z(A)$$

4 La méthode des modèles acycliques

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. Un ensemble d'objets $\mathcal{M}$ de $\mathcal{C}$ est appelé modèle. Soit $G : \mathcal{C} \to {}_{\mathrm{R}}\mathrm{Mod}$ un foncteur. La catégorie ${}_{\mathrm{R}}\mathrm{Mod}$ peut être remplacée par la catégorie ${}_R\mathrm{Mod}_S$ pour R, S des anneaux ou des k-algèbres.

Définition 4.1. *On dit que G est libre relativement au modèle $\mathcal{M}$ si pour tout $M \in \mathcal{M}$ il existe $B_M \subset G(M)$ tel que $G(X)$ est un R-module libre de base $\{G(f)(b)\}_{b \in B_M, f : M \to X}$. Autrement dit, le morphisme de R-modules*

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{M \in \mathcal{M}} R[B_M \times \mathrm{Hom}(M, X)] & \to & G(X) \\ (b, f) & \mapsto & G(f)(b) \end{array}$$

est un isomorphisme.

On dit qu'un foncteur $G : \mathcal{C} \to \mathrm{Ch}({}_{\mathrm{R}}\mathrm{Mod})$ est libre relativement au modèle $\mathcal{M}$ si pour tout $j \in \mathbb{Z}$, le foncteur $G_j : \mathcal{C} \to {}_{\mathrm{R}}\mathrm{Mod}$ est libre par rapport au modèle $\mathcal{M}$.

Lemme 4.2. *Soit $G : \mathcal{C} \to {}_{\mathrm{R}}\mathrm{Mod}$ un foncteur libre relativement au modèle $\mathcal{M}$ et $H : \mathcal{C} \to {}_{\mathrm{R}}\mathrm{Mod}$ un foncteur. L'application*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Nat}(G, H) & \to & \prod_{M \in \mathcal{M}} H(M)^{B_M} \\ \tau & \mapsto & \tau_M|_{B_M} \end{array}$$

est une bijection.

Corollaire 4.3. *Soit $G : \mathcal{C} \to {}_{\mathrm{R}}\mathrm{Mod}$ un foncteur libre relativement au modèle $\mathcal{M}$. Tout diagramme*

$$\begin{tikzcd} & G \arrow[d, "\tau"] \\ H \arrow[r, "\Phi"'] & H' \end{tikzcd}$$

de transformations naturelles entre foncteurs satisfaisant $\forall M \in \mathcal{M}, \Phi_M$ est surjective admet un relèvement $\tau' : G \to H$, à savoir $\Phi \circ \tau' = \tau$.

Définition 4.4. *On dit qu'un foncteur $G : \mathcal{C} \to \mathrm{Ch}({}_{\mathrm{R}}\mathrm{Mod})$ est acyclique relativement au modèle $\mathcal{M}$ si pout tout $M \in \mathcal{M}$ le complexe $G(M)$ est acyclique.*

Théorème 4.5. *Soit C une catégorie munie d'un modèle $\mathcal{M}$; soient $G, G' : \mathcal{C} \to \mathrm{Ch}_{\geq 0}({}_{\mathrm{R}}\mathrm{Mod})$ et $A, A' : \mathcal{C} \to {}_{\mathrm{R}}\mathrm{Mod}$ des foncteurs. On suppose qu'il existe des transformations naturelles $\epsilon : G_0 \to A$, $\epsilon' : G'_0 \to A'$ telles que $\epsilon d_1^G = 0$, $\epsilon' d_1^{G'} = 0$. On note $\tilde{G}'$ le foncteur $\mathcal{C} \to \mathrm{Ch}({}_{\mathrm{R}}\mathrm{Mod})$ obtenu à partir de G' en ajoutant A' en degré -1.*

On suppose que G est libre relativement à $\mathcal{M}$ et $\tilde{G}'$ est acyclique relativement à $\mathcal{M}$.

1. *Pour toute transformation naturelle $f : A \to A'$, il existe une transformation naturelle $T : G \to G'$ telle que le diagramme suivant commute*

$$\begin{tikzcd} G_0 \arrow[r, "T_0"] \arrow[d, "\epsilon"'] & G'_0 \arrow[d, "\epsilon'"] \\ A \arrow[r, "f"'] & A' \end{tikzcd}$$

2. *Si T et T' sont deux transformations naturelles de G vers G' faisant commuter le diagramme précédent, alors il existe une famille de transformations naturelles $S_p : G_p \to G'_{p+1}$ vérifiant*

$$d^{G'} S + S d^G = T - T'$$