M2 **Université Paris Diderot**
2016/2017 Cours du 11 octobre 2016

Algèbre Homologique et Topologie Algébrique
Chapitre 4–Applications à la topologie algébrique

1 Homologie singulière

1.1 n-simplexes

L'ensemble $\{0, \ldots, n\}$ est noté $[n]$.

Définition 1.1. *Un n-simplexe $\sigma =< v_0 \ldots, v_n >$ est l'enveloppe convexe de $n+1$ points $v_0, \ldots, v_n$ de $\mathbb{R}^N$ affinement indépendants. La i-ème face de σ est le $(n-1)$-simplexe $< v_0 \ldots, \hat{v_i}, \ldots, v_n >$.*

Pour $S \subset [n]$, le simplexe σ_S est l'enveloppe convexe de l'ensemble $\{v_s, s \in S\}$. Une face propre de σ est un simplexe σ_S avec $S \neq [n]$. Le bord de σ, noté $\partial\sigma$ est l'union de toutes les faces propres de σ. L'intérieur de σ, noté $\overset{\circ}{\sigma}$ est $\sigma \setminus \partial\sigma$.

Le n-simplexe standard Δ^n est le n-simplexe $< e_0, \ldots, e_n >$ où $\{e_i, 0 \leq i \leq n\}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$. L'application $\epsilon^i : \Delta^{n-1} \to \Delta^n$ est l'application affine qui identifie Δ^{n-1} à la i-ème face Δ^n_i. Plus précisément

$$\epsilon^i(e_j) = \begin{cases} e_j, & 0 \leq j < i, \\ e_{j+1}, & i \leq j \leq n-1. \end{cases}$$

Proposition 1.2. *Tout n-simplexe σ est homéomorphe à la boule $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n | ||x|| \leq 1\}$ via un homéomorphisme φ satisfaisant $\varphi|_{\partial\sigma}$ est un homéomorphisme entre $\partial\sigma$ et la sphère $S^{n-1} = \partial D^n = \{x \in \mathbb{R}^n | ||x|| = 1\}$.*

1.2 Homologie singuliere à coefficients dans un anneau R

Soient X, Y des espaces topologiques et $f : X \to Y$ une application continue. Pour $n \geq 0$, on définit le foncteur $C_n(-; R)$ par:

- $C_n(X; R)$ est le R-module (à gauche) libre sur l'ensemble des applications continues de Δ^n dans X.
- $C_n(f; R)$ est l'unique morphisme de R-modules qui à $\sigma : \Delta^n \to X$ associe $f \circ \sigma : \Delta^n \to Y$.

Les morphismes de R-modules $d_i : C_n(X; R) \to C_{n-1}(X; R)$ définis par $d_i(\sigma) = \sigma \circ \epsilon^i$ pour $\sigma : \Delta^n \to X$ induisent des transformations naturelles $C_n(-; R) \to C_{n-1}(-; R)$, donnant à la famille de foncteurs $C_n(-; R)$ une structure de R-module à gauche (pré)-simplicial.

Définition 1.3. *Soit X un espace topologique. Le complexe $(C_n(X; R), d = \sum_{i=0}^n (-1)^i d_i)_{n \geq 0}$ est le complexe singulier de X à coefficients dans R. Il est augmenté par $\epsilon : C_0(X; R) \to R$ qui à $\sigma : \Delta^0 \to X$ associe 1_R.*

L'homologie de ce complexe est appelée homologie singulière de X à coefficients dans R. Elle est notée $H_n(X; R)$.

Pour X non vide, l'homologie réduite de X est définie par $\tilde{H}_n(X; R) = H_n(\tilde{C}(X; R)), n \geq 0$.

Remarque. Si $X = \emptyset$ alors $C_n(X; R) = 0, \forall n \geq 0$. Donc son homologie est nulle. On ne considère pas l'homologie réduite dans ce cas là.

Proposition 1.4. *Si X est contractile alors $\tilde{C}(X;R)$ l'est aussi. En particulier $H_n(X;R) = 0, n > 0$ et $H_0(X;R) = R$.*

Remarque. On a $C_*(X,R) = C_*(X,\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} R$ donc par la formule de Künneth on a une suite exacte courte

$$0 \to H_n(X,\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} R \to H_n(X;R) \to \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(H_{n-1}(X,\mathbb{Z}),R) \to 0.$$

Dans toute la suite on écrira $C_*(X)$ pour $C_*(X;\mathbb{Z})$ et $H_*(X)$ pour $H_*(X;\mathbb{Z})$.

1.3 Homologie relative

On peut définir la catégorie des paires d'espaces topologiques où les objets sont des paires (X,A) avec $A \subset X$, et les morphismes $f : (X,A) \to (Y,B)$ sont les applications continues $f : X \to Y$ qui vérifient $f(A) \subset B$.

Définition 1.5. *Deux morphismes $f,g : (X,A) \to (Y,B)$ sont homotopes relativement à A s'il existe $H : (X \times I, A \times I) \to (Y,B)$ tel que $Hi_0 = f$ et $Hi_1 = g$ où $i_\epsilon : (X,A) \to (X \times I, A \times I)$ est défini par $i_\epsilon(x) = (x,\epsilon)$ pour $\epsilon \in \{0,1\}$.*

Définition 1.6. *Si $A \subset X$ alors $C_*(A)$ est un sous-complexe de $C_*(X)$ et l'on définit le complexe relatif $C_*(X,A)$ comme le quotient $C_*(X)/C_*(A)$. L'homologie de ce complexe, notée $H_*(X,A)$, est appelé homologie singulière de X relativement à A.*

Remarque. Si $A = \emptyset$ alors $C_n(A) = 0$. En particulier $C_n(X,\emptyset) = C_n(X)$ et $H_*(X,\emptyset) = H_*(X)$.

Théorème 1.7. *L'homologie singulière vérifie les axiomes d'Eilenberg-Steenrod, à savoir:*

La famille $H = (H_n)_{n \geq 0}$ est une famille de foncteurs de la catégorie des paires d'espaces topologiques dans la catégorie des groupes abéliens, munie de transformations naturelles $\partial_H : H_n(X,A) \to H_{n-1}(A)$ satisfaisant les axiomes suivants:

i) L'invariance homotopique: si $f,g : (X,A) \to (Y,B)$ sont homotopes relativement à A, alors $H_*(f) = H_*(g)$.

ii) L'excision: pour tout $V \subset A \subset X$ avec $\overline{V} \subset \mathring{A}$, on a

$$H_n(X \setminus V, A \setminus V) \to H_n(X,A)$$

est un isomorphisme pour tout n.

iii) Dimension: $H_n(pt,\emptyset) = 0, \forall n > 0$

iv) Additivité: Si X est union disjointe de sous-espaces X_α alors $H_n(X) = \oplus_\alpha H_n(X_\alpha)$.

v) La longue suite exacte: pour $A \subset X$ on considère $i : (A,\emptyset) \to (X,\emptyset)$ et $j : (X,\emptyset) \to (X,A)$ les deux inclusions. Il existe une suite exacte longue

$$\ldots \longrightarrow H_n(A) \xrightarrow{i_*} H_n(X) \xrightarrow{j_*} H_n(X,A) \xrightarrow{\partial_H} H_{n-1}(A) \xrightarrow{i_*} \ldots$$

`fin du cours du 13 octobre`

Remarque. La longue suite exacte est encore valable en homologie réduire si $A \neq \emptyset$, en particulier on a

$$\ldots \longrightarrow \tilde{H}_n(A) \xrightarrow{i_*} \tilde{H}_n(X) \xrightarrow{j_*} H_n(X,A) \xrightarrow{\partial_H} \tilde{H}_{n-1}(A) \xrightarrow{i_*} \ldots$$

1.4 Excision et conséquences

L'énoncé de l'excision est équivalent à l'énoncé suivant:

Théorème 1.8. *Soient $A, B \subset X$ tels que $X = \overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B}$. L'inclusion de paire $(B, A \cap B) \to (X, A)$ induit un isomorphisme en homologie.*

Corollaire 1.9. *Pour tout $n \geq 0$ on a*

$$\tilde{H}_k(S^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \textit{si } k = n \\ 0 & \textit{sinon} \end{cases}$$

Remarque. On en déduit que $\tilde{H}_k(S^n, R) = R$ pour $k = n$ et 0 sinon, pout tout anneau R.

En effet par la formule de Künneth on a une suite exacte courte

$$0 \to H_k(S^n, \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} R \to H_k(S^n; R) \to \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(H_{k-1}(S^n, \mathbb{Z}), R) \to 0$$

Dans notre cas les groupes d'homologie des sphères sont soit nuls soit $\mathbb{Z}$, groupe abélien libre, d'où l'isomorphisme.

L'excision est basée sur le théorème suivant dit des $\mathcal{U}$-chaines:

Définition 1.10. *Soit $\mathcal{U} = \{\mathcal{U}_i, i \in I\}$ une famille de sous espaces de X tels que*

$$X = \cup_{i \in I} \overset{\circ}{U_i} .$$

Le complexe des $\mathcal{U}$-chaines noté $C_*^{\mathcal{U}}(X) \subset C_*(X)$ est le $\mathbb{Z}$-module libre engendré par les n-simplexes singuliers d'image dans U_i pour un certain i.

Théorème 1.11. *L'inclusion $C_*^{\mathcal{U}}(X) \subset C_*(X)$ induit un isomorphisme en homologie.*

Corollaire 1.12 (Mayer-Vietoris)**.** *Soient $U, V \subset X$ des ouverts qui recouvrent X. Il existe une suite exacte longue*

$$\dots \longrightarrow H_*(U \cap V) \xrightarrow{i_*} H_*(U) \oplus H_*(V) \xrightarrow{j_*} H_*(X) \xrightarrow{\varphi} H_{*-1}(U \cap V) \xrightarrow{i_*} \dots$$

$i : C_*(U \cap V) \to C_*(U) \oplus C_*(V)$ et $j : C_*(U) \oplus C_*(V) \to C_*(X)$ sont définies par $i(\sigma) = (\sigma, -\sigma)$ et $j(\sigma_A, \sigma_B) = \sigma_A + \sigma_B$ et où φ est l'application induite par $H_*(X) \approx H_*^{\mathcal{U}}(X) \to H_{*-1}(U \cap V)$ qui à $[\sigma] \in H_*^{\mathcal{U}}(X)$ associe $\partial\sigma_U = -\partial\sigma_V$ où $\sigma = j(\sigma_U, \sigma_V)$.

La démonstration du théorème des $\mathcal{U}$-chaines utilise la subdivision barycentrique. On montre que la subdivision barycentrique est homotope à l'identité grâce à la méthode des modèles acycliques.

1.5 Comportements de l'homologie singulière

1.5.1 Par rapport aux espaces quotients

Proposition 1.13. *Si (X, A) est une paire d'espaces topologiques et A est contractile alors $H_n(X, A) = \tilde{H}_n(X)$ pour tout $n \geq 0$.*

Définition 1.14. *Soit X un espace topologique et A un sous-espace de X. On note $i : A \to X$ l'inclusion canonique. On dit que X se rétracte par déformation (resp. forte) sur A s'il existe $r : X \to A$ tel que $ri = 1_A$ (on dit que r est un rétraction) et $ir \simeq 1_X$ rel A (resp. l'homotopie $H : X \times I \to X$ de ri à 1_X satisfait $H(a, t) = a$ pour tout $a \in A$).*

On dit que la paire (X, A) est une bonne paire si A est fermé dans X et s'il existe un voisinage ouvert V de A tel que V se rétracte par déformation sur A.

Théorème 1.15. *Si (X, A) est une bonne paire, alors l'application quotient*

$$q : (X, A) \to (X/A, A/A)$$

induit un isomorphisme en homologie.

Corollaire 1.16. *Si $(X_j, x_j)_{j \in J}$ sont des bonnes paires, alors*

$$\bigoplus_j \iota_j : \bigoplus_j \tilde{H}(X_j) \to \tilde{H}(\bigvee_j X_j)$$

est un isomorphisme.

1.5.2 Par rapport aux produits

Théorème 1.17. *Soient X, Y des espaces topologiques.*

- *Les complexes $C_*(X \times Y)$ et $C_*(X) \otimes_{\mathbb{Z}} C_*(Y)$ sont homotopiquement équivalents.*
- *On en déduit une suite exacte courte*

$$0 \to \bigoplus_{p+q=n} H_p(X) \otimes H_q(Y) \to H_n(X \times Y) \to \bigoplus_{p+q=n-1} \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(H_p(X), H_q(Y)) \to 0$$

Exemple: On calcule

$$H_*(S^1 \times S^1) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } * = 0, 2 \\ Z \oplus \mathbb{Z} & \text{si } * = 1 \\ 0 & \text{si } * > 2 \end{cases}$$

De même

$$H_*(S^1 \vee S^1 \vee S^2) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } * = 0, 2 \\ Z \oplus \mathbb{Z} & \text{si } * = 1 \\ 0 & \text{si } * > 2 \end{cases}$$

Cependant ces deux espaces ne sont pas homotopiquement équivalent car le groupe fondamental du premier est $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ alors que le groupe fondamental du deuxième est $\mathbb{Z} \star \mathbb{Z}$.

1.6 Degré d'une application $S^n \to S^n$

1.6.1 Définition et propriétés

Définition 1.18. *Soit $f : S^n \to S^n$. Le degré de f, noté $deg(f)$, est l'unique entier $d \in \mathbb{Z}$ tel que $H_n(f) : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ soit la multiplication par d.*

Proposition 1.19. *Soient $f, g : S^n \to S^n$. On a les propriétés suivantes*

- *$deg(id) = 1$*
- *Si f n'est pas surjective alors $deg(f) = 0$*
- *$deg(f \circ g) = deg(f)deg(g)$*
- *Si f est homotope à g alors $degf = degg$. En particulier, si f est une équivalence d'homotopie alors $deg(f) \in \{-1, 1\}$.*
- *Si f est une réflexion hyperplane par rapport à l'hyperplan $x_i = 0$ alors $deg(f) = -1$*
- *Le degré de l'application antipodale $A : S^n \to S^n$ qui à x associe $-x$ est $(-1)^{n+1}$*

1.6.2 Calcul explicite

Pour calculer explicitement le degré d'une application on procède de la manière suivante; on suppose que f est surjective et qu'il existe $y \in S^n$ tel que $f^{-1}(y)$ est fini. On note $x_1, \dots, x_r$ les antécédents de y par f. On choisit un voisinage V de y et U_i des voisinages de x_i disjoints, tels que $f(U_i) \subset V$. Pour chaque i on a une application restreinte

$$H_n(f|_{U_i}) : H_n(U_i, U_i \setminus \{x_i\}) \to H_n(V, V \setminus \{y\})$$

En utilisant l'excision et la suite exacte longue d'homologie on a $H_n(U_i, U_i \setminus \{x_i\}) \approx \mathbb{Z} \approx H_n(V, V \setminus \{y\})$; on note $degf|_{x_i}$ l'entier tel que $H_n(f|_{U_i})(1) = degf|_{x_i}$. Il s'appelle le degré local de f par rapport à x_i.

Proposition 1.20.

$$degf = \sum_{i=1}^{r} \deg f|_{x_i}$$

Exemple:

Le degré de l'application $S^n \to S^n$ obtenu par composition

$$S^n \xrightarrow{\pi_n} \mathbb{R}P^n \xrightarrow{q_n} \mathbb{R}P^n/\mathbb{R}P^{n-1} \xrightarrow{\approx} S^n$$

est $1 + (-1)^{n+1}$.

2 Homologie cellulaire

2.1 CW-complexes

Définition 2.1. *On dit que l'espace X est obtenu à partir de l'espace Y par attachement d'une cellule de dimension n si X est la colimite du diagramme*

$$\begin{tikzcd} S^{n-1} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, hook] & Y \\ D^n & \end{tikzcd}$$

On note $X = Y \cup_\varphi e^n$, $\Phi : D^n \to X$ l'application appelée application caractéristique qui réalise un homéomorphisme de $\overset{\circ}{D^n}$ sur e^n

Définition 2.2. *Un complexe cellulaire X est un espace topologique obtenu par récurrence, par attachement successifs de cellules. Plus précisément, on commence par un ensemble discret de points $X^{(0)}$. On suppose construit l'espace topologique $X^{(n-1)}$. On obtient $X^{(n)}$ à partir de $X^{(n-1)}$ par attachement d'un ensemble de cellules $\{e^n_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}_n}$ de dimension n. L'espace topologique $X^{(n)}$ est appelé n-squelette de X. X est de dimension fini s'il existe N pour lequel $X = X^{(N)}$. X est un CW-complexe fini si $X^{(0)}$ est fini et le nombre de cellules attachées est fini.*

`Fin du cours du 14 octobre`

Remarque. Si X est un CW-complexe, $X = \cup_{n, \alpha \in \mathcal{A}_n} e^n_\alpha$, en tant qu'ensemble; cependant la topologie est différente, la topologie dépend de la manière dont les cellules sont attachées.

Exemples: On peut donner une structure cellulaire à la sphère $X = S^n$ avec

$$X^{(0)} = * = X^{(1)} = \ldots = X^{(n-1)}.$$

$X = X^{(n)}$ est obtenu à partir de $X^{(n-1)} = X^{(0)}$ en attachant une cellule de dimension n via l'application constante $S^{n-1} \to *$. Cette structure cellulaire se réduit donc à une 0-cellule et une n-cellule.

Une autre structure cellulaire sur $Y = S^n$ est donnée par récurrence $Y^{(0)} = *_S \cup *_N = S^0$ et $Y^{(k)}$ est obtenu à partir de $Y^{(k-1)} = S^{k-1}$ en attachant deux cellules de dimension k, une qui correspond à l'hémisphère nord et l'autre à l'hémisphère sud, de telle manière que $Y^{(k)}$ est homéomorphe à S^k. Cette structure cellulaire a donc deux k-cellules pour $0 \leq k \leq n$.

De la même manière on a vu que $\mathbb{R}P^n$ est obtenu à partir de $\mathbb{R}P^{n-1}$ en attachant une cellule de dimension n via l'application $\pi : S^{n-1} \to \mathbb{R}P^{n-1}$. Ainsi cette structure cellulaire possède une k cellule pour $0 \leq k \leq n$.

L'espace projectif complexe $\mathbb{C}P^n$ est obtenu à partir de $\mathbb{C}P^{n-1}$ en attachant une cellule de dimension $2n$. On le muni ainsi d'une structure cellulaire comprenant une $2k$-cellule pour tout $0 \leq k \leq n$.

Proposition 2.3. *Soit X un CW-complexe et $A \subset X$ un sous espace topologique fermé tel que A soit une union de cellules de X. Pour toute cellule $e^n_\alpha \in A$, l'application caractéristique $\Phi_\alpha : D^n_\alpha \to X$ a son image dans A. A est donc un complexe cellulaire. On dit que la paire (X, A) est une paire de CW-complexes. La paire (X, A) est une bonne paire.*

Remarque. En particulier les paires $(X^{(n)}, X^{(k)})$, $k < n$ et $(X, X^{(n)})$ sont des paires de *CW*-complexes.

Proposition 2.4. *Le produit de deux CW-complexes est un CW-complexe. Si X est un CW-complexe dont les cellules sont $\{e^n_\alpha\}_{n,\alpha\in\mathcal{A}_n}$ et Y est un CW-complexe dont les cellules sont $\{e^n_\beta\}_{n,\beta\in\mathcal{B}_n}$, alors $X \times Y$ est un CW-complexe dont les cellules de dimension n sont $\{e^n_{\alpha,\beta}\}_{(\alpha,\beta)\in\mathcal{A}_p\times\mathcal{B}_q, p+q=n}$.*

Définition 2.5. *Un CW-complexe X est dit réduit si $X^{(0)} = *$.*

Proposition 2.6. *Si X est un CW-complexe réduit alors $X^{(1)}$ est un bouquet de cercles.*

Plus généralement $(X^{(n)}, X^{(n-1)})$ est une bonne paire et

$$X^{(n)}/X^{(n-1)} = \vee_{\alpha\in\mathcal{A}_n} S^n$$

2.2 Homologie cellulaire

2.2.1 Définition

Dans toute cette partie X est un CW-complexe.

Proposition 2.7.
- *$H_k(X^{(n)}, X^{(n-1)}) = 0, \forall k \neq n$. De plus $H_n(X^{(n)}, X^{(n-1)})$ est un $\mathbb{Z}$-module libre de base $e^n_\alpha, \alpha \in \mathcal{A}_n$.*
- *$H_k(X^{(n)}) = 0, \forall k > n$; si X est de dimension finie N, alors $H_k(X) = 0, \forall k > N$.*
- *L'inclusion canonique $X^{(n)} \to X$ induit un isomorphisme $H_k(X^{(n)}) \to H_k(X)$ pour tout $k < n$.*

Définition 2.8. *La composée*

$$d_n: \ H_n(X^{(n)}, X^{n-1}) \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(X^{(n-1)}) \xrightarrow{j_{n-1}} H_{n-1}(X^{(n-1)}, X^{n-2})$$

vérifie $d_n d_{n+1} = 0$. On note $H_n^{CW}(X)$ l'homologie en degré n du complexe ainsi obtenu, appelé homologie cellulaire du CW-complexe X.

Théorème 2.9. *Pour tout n on a $H_n^{CW}(X) = H_n(X)$.*

Corollaire 2.10. *On a $H_n(X) = 0$ si X n'a pas de n-cellules; et si X a k n-cellules alors $H_n(X)$ est un groupe abélien de type fini engendré par au plus k éléments.*

Exemples:

$$H_k(\mathbb{C}P^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } k = 2p \leq 2n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour $n > 1$

$$H_k(S^n \times S^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } k = 0, 2n \\ \mathbb{Z}^2, & \text{si } k = n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

2.2.2 Calcul de la différentielle

On a

$$H_n(X^{(n)}, X^{(n-1)}) \approx \tilde{H}_n(X^{(n)}/X^{(n-1)}) \approx \oplus_{\alpha \in \mathcal{A}_n} \tilde{H}_n(S^n_\alpha)$$

Pour $\alpha \in \mathcal{A}_n, \beta \in \mathcal{A}_{n-1}$ on note $\Delta_{\alpha\beta}$ l'application obtenue par composition des applications

$$S_\alpha^{n-1} \xrightarrow{\varphi_\alpha} X^{(n-1)} \longrightarrow X^{(n-1)}/X^{(n-2)} \approx \vee_{\beta \in \mathcal{A}_{n-1}} S_\beta^{n-1} \xrightarrow{pr_\beta} S_\beta^{n-1}$$

et l'on note $d_{\alpha\beta}$ le degré de $\Delta_{\alpha\beta}$.

Proposition 2.11.

$$d_n(e_\alpha^n) = \sum_\beta d_{\alpha\beta} e_\beta^{n-1}$$

Corollaire 2.12.

$$H_k(\mathbb{R}P^n) = \begin{cases} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \textit{si } k \textit{ est impair et } k < n \\ \mathbb{Z} & \textit{si } k = 0, \\ \mathbb{Z} & \textit{si } k = n \textit{ et si } n \textit{ est impair,} \\ 0 & \textit{sinon .} \end{cases}$$

3 Cohomologie

3.1 Cohomologie singulière

Soit G un groupe abélien, par définition la cohomologie de X à coefficients dans G, notée $H^*(X; G)$ est la cohomologie du complexe de cochaines $\mathrm{Hom}(C_n(X), G)$.

Pour toute paire d'espaces (X, A), la suite exacte courte de complexes de chaines

$$0 \to C_*(A) \to C_*(X) \to C_*(X, A) = C_*(X)/C_*(A) \to 0$$

induit une suite exacte courte de complexes de cochaines

$$0 \leftarrow C^*(A,G) \leftarrow C^*(X,G) \leftarrow C^*(X,A;G) = \mathrm{Hom}(C_*(X)/C_*(A),G) \leftarrow 0$$

et on définit $H^*(X,A;G)$ comme la cohomologie du complexe de cochaines $C^*(X,A;G)$.

La cohomologie à coefficients dans G satisfait les axiomes de Steenrod (version cohomologique).

La famille $H = (H^n)_{n\geq 0}$ est une famille de foncteurs contravariants de la catégorie des paires d'espaces topologiques dans la catégorie des groupes abéliens, munie de transformations naturelles $\partial_H : H^n(A) \to H^{n+1}(X,A)$ satisfaisant les axiomes suivants:

i) L'invariance homotopique: si $f, g : (X,A) \to (Y,B)$ sont homotopes relativement à A, alors $H^*(f) = H^*(g)$.

ii) L'excision: pour tout $V \subset A \subset X$ avec $\overline{V} \subset \mathring{A}$, on a

$$H^n(X \setminus V, A \setminus V) \leftarrow H^n(X,A)$$

est un isomorphisme pour tout n.

iii) Dimension: $H^n(pt, \emptyset) = 0, \forall n > 0$

iv) Additivité: Si X est union disjointe de sous-espaces X_α alors $H^n(X) = \prod_\alpha H^n(X_\alpha)$.

v) La longue suite exacte: pour $A \subset X$ on considère $i : (A,\emptyset) \to (X,\emptyset)$ et $j : (X,\emptyset) \to (X,A)$ les deux inclusions. Il existe une suite exacte longue

$$\ldots \xleftarrow[i_*]{} H^n(A) \xleftarrow[j_*]{} H^n(X) \xleftarrow[\partial_H]{} H^n(X,A) \xleftarrow[i_*]{} H^{n-1}(A) \longleftarrow \ldots$$

Le théorème des coefficients universels se traduit de la manière suivante

Théorème 3.1. *Soit X un espace topologique, G un groupe abélien, on a une suite exacte courte, pour tout $n \geq 0$*

$$0 \to \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(H_{n-1}(X);G) \to H^n(X;G) \to \mathrm{Hom}(H_n(X);G) \to 0$$

Remarque. La suite exacte courte ci-dessus est fonctorielle en X: si $f : X \to Y$ est une application continue, alors f induit un morphisme de suites exactes courtes

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(H_{n-1}(X);G) \arrow[r] & H^n(X;G) \arrow[r] & \mathrm{Hom}(H_n(X);G) \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(H_{n-1}(Y);G) \arrow[r] \arrow[u, "f^*"] & H^n(Y;G) \arrow[r] \arrow[u, "f^*"] & \mathrm{Hom}(H_n(Y);G) \arrow[r] \arrow[u, "f^*"] & 0
\end{tikzcd}$$

Corollaire 3.2.

- *$H^0(X;G) \approx \mathrm{Hom}(H_0(X;G)) \approx G^c$, où c est le nombre de composantes connexes par arcs de X;*
- *Si $H_n(X) = \mathbb{Z}^r \oplus T_n$ et $H_{n-1}(X) = \mathbb{Z}^p \oplus T_{n-1}$ où T_n et T_{n-1} sont des groupes de torsion alors $H^n(X;\mathbb{Z}) \approx T_{n-1} \oplus \mathbb{Z}^r$.*
- *Si $f : X \to Y$ induit un isomorphisme en homologie alors $H^*(f,G) : H^*(Y,G) \to H^*(X;G)$ est un isomorphisme.*

Définition 3.3. *L'augmentation $\epsilon : C_0(X) \to \mathbb{Z}$ induit une coaugmentation $\epsilon^* : G \to C^0(X;G)$. On définit la cohomologie réduite comme*

$$\tilde{H}^k(X;G) = \begin{cases} \mathrm{Ker}\,\partial_1^*/\mathrm{Im}\epsilon^*, & si\ k = 0 \\ H^k(X;G), & sinon\ . \end{cases}$$

Remarque. On a $\mathrm{Ker}\,\delta_1^* = \{\varphi : X \to G | \varphi \text{ est constante sur les composantes connexes de } X\}$ et $\mathrm{Im}\epsilon^* = \{\varphi : X \to G | \varphi \text{ est constante }\}$.

3.2 Cohomologie cellulaire

Définition 3.4. *La composée*

$$d_{n-1}:\ H^n(X^{(n)},X^{(n-1)},G) \xleftarrow{\partial} H^{n-1}(X^{(n-1)},G) \xleftarrow{j_{n-1}} H^{n-1}(X^{(n-1)},X^{(n-2)},G)$$

vérifie $d_n d_{n-1}=0$. On note $H^n_{CW}(X,G)$ la cohomologie en degré n du complexe ainsi obtenu, appelé cohomologie cellulaire du CW-complexe X.

Théorème 3.5. *Pour tout CW-complexe $H^n_{CW}(X;G)=H^n(X;G)$.*

3.3 Cup-produit

Soit R un anneau. On définit une application

$$\cup : C^k(X;R)\times C^l(X;R)\to C^{k+l}(X;R)$$

qui à (φ,ψ) associe

$$(\varphi\cup\psi)(\sigma)=\varphi(\sigma|_{[v_0,\dots,v_k]})\psi(\sigma|_{[v_k,\dots,v_{k+l}]})$$

Lemme 3.6. *On a pour tout $\varphi\in C^k(X;R),\psi\in C^l(X;R),\xi\in C^m(X;R)$*

$$\partial(\varphi\cup\psi)=\partial\varphi\cup\psi+(-1)^k\varphi\cup\partial\psi$$

$$(\varphi\cup\psi)\cup\xi=\varphi\cup(\psi\cup\xi)$$

$$1\cup\phi=\phi\cup 1=\phi$$

où $1\in C^0(X,R)$ est l'application qui à $x\in X$ associe 1_R. De plus l'application $\cup$ est quasi-bilinéaire.

Théorème 3.7. *L'application $\cup$ munit $H^*(X;R)$ d'une structure de R-algèbre commutative graduée:*

$$x\cup y=(-1)^{kl}y\cup x,\forall x\in H^k(X;R),y\in H^l(X;R)$$

Si $h:X\to Y$ alors l'application induite $h^*:H^*(Y;R)\to H^*(X;R)$ est un morphisme d'algèbres.

Proposition 3.8. $H^*(S^n,R)=R[x]/(x^2)$.

Théorème 3.9 (admis)**.**

$$H^*(\mathbb{R}P^n;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})\approx\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[\alpha]/(\alpha^{n+1}),|\alpha|=1$$

$$H^*(\mathbb{C}P^n;\mathbb{Z})\approx\mathbb{Z}[\alpha]/(\alpha^{n+1}),|\alpha|=2$$

3.4 Comportement du $\cup$-produit

3.4.1 Par rapport aux coproduits d'espaces topologiques

Théorème 3.10. *Si $X=\underset{\alpha\in\mathcal{A}}{\cup}X_\alpha$ est une union disjointe d'espaces topologiques alors les inclusions $X_\alpha\to X$ induisent un isomorphisme $H^*(X,R)\to\prod_{\alpha\in\mathcal{A}}H^*(X_\alpha,R)$ de R-modules qui est un isomorphisme d'algèbres commutatives graduées.*

Remarque. Comme dans le cas de l'homologie, si pour tout $\alpha\in\mathcal{A}$ la paire (X_α,x_α) est une bonne paire d'espaces topologiques, on a un isorphisme de R-modules.

$$\rho:\tilde{H}^*(\underset{\alpha\in\mathcal{A}}{\vee}X_\alpha,R)\to\underset{\alpha\in\mathcal{A}}{\oplus}\tilde{H}^*(X_\alpha,R)$$

Cependant $\tilde{H}^*(X_\alpha)$ n'est plus une algèbre commutative graduée, car on a perdu l'unité en cours de route. Mais on a toujours $\rho(\alpha\cup\beta)=\rho(\alpha)\cup\rho(\beta)$. C'est un isomorphisme d'algèbres commutatives graduées non unitaires.

3.4.2 Par rapport aux produits d'espaces topologiques

Définition 3.11. *Soient X et Y des espaces topologiques. Soit $\sigma \times \tau : \Delta^{k+l} \to X \times Y$ une fonction continue. On définit le "cross-produit"*

$$\times : C^k(X; R) \times C^l(Y; R) \to C^{k+l}(X \times Y; R)$$

comme l'"application qui à (φ, ψ) associe $\varphi \times \psi : \sigma \times \tau \mapsto \varphi(\sigma|_{[v_0,\ldots,v_k]})\psi(\tau|_{[v_{k+1},\ldots,v_{k+l}]})$.

Remarque. En notant $\Delta : X \to X \times X$ l'application diagonale qui à $x \in X$ associe (x, x), on a $\varphi \cup \psi = \Delta^*(\varphi \times \psi)$.

Théorème 3.12. *Le "cross-produit" induit un morphisme de R-modules*

$$\times : H^*(X; R) \otimes_R H^*(Y; R) \to H^*(X \times Y, R)$$

Ce morphisme est morphisme d'algèbres commutatives graduées.

Théorème 3.13 (Théorème de Künneth)**.** *Si X et Y sont des CW-complexes, et $H^*(Y; R)$ est un R-module libre de type fini alors le morphisme $\times$ est un isomorphisme algèbres commutatives graduées.*