Séance de TD n°1

15 septembre 2017

Le langage des catégories appliqué aux R-modules.

1 Catégories

Exercice 1: (groupoïdes)
Un *groupoïde* est par définition une catégorie dans laquelle tout morphisme est inversible.

1) Soit $\mathcal{G}$ un groupoïde.
a) Justifier que pour tout objet x de $\mathcal{G}$, $Hom_{\mathcal{G}}(x,x)$ est un groupe.
b) Montrer que si x et y sont deux objets de $\mathcal{G}$ tels que $Hom_{\mathcal{G}}(x,y)$ est non vide, alors $Hom_{\mathcal{G}}(x,x)$ et $Hom_{\mathcal{G}}(y,y)$ sont isomorphes. Si tous les $Hom_{\mathcal{G}}(x,y)$ sont non vides, on dira que le groupoïde $\mathcal{G}$ est *connexe*.
c) Montrer que si $\mathcal{G}$ est connexe, il est entièrement déterminé à isomorphisme près par un groupe (l'un des $Hom_{\mathcal{G}}(x,x)$) et par l'ensemble des objets.

2) Un exemple standard est le *groupoïde fondamental* d'un espace topologique X, noté $\pi(X)$: les objets de $\pi(X)$ sont les points de X et les morphismes sont les classes d'homotopie des chemins entre deux points.
a) Pourquoi obtient-on bien un groupoïde?
b) Préciser la notion de connexité dans ce cadre et définir le groupe fondamental.

Exercice 2: (lemme de Yoneda)

1) Soit $\mathcal{D}$ une petite catégorie, $K : \mathcal{D} \longrightarrow Set$ un foncteur et r un objet de $\mathcal{D}$. On note $Nat(\mathcal{D}(r,\cdot),K)$ l'ensemble des transformations naturelles entre les foncteurs $\mathcal{D}(r,\cdot)$ et K. Montrer que l'application

$$y_{(K,r)} : \begin{array}{ccc} Nat(\mathcal{D}(r,\cdot),K) & \longrightarrow & K(r) \\ \alpha & \longmapsto & \alpha_r(1_r) \end{array}$$

est bijective.

2) En déduire que quels que soient les objets r et s de $\mathcal{D}$, toute transformation naturelle entre les foncteurs $\mathcal{D}(r,\cdot)$ et $\mathcal{D}(s,\cdot)$ est de la forme $\mathcal{D}(h,\cdot)$ pour un unique morphisme $h : s \longrightarrow r$.

3) Montrer que l'application $y_{(K,r)}$ est naturelle en K et r. Formellement, on note $Set^{\mathcal{D}}$ la catégorie des foncteurs de $\mathcal{D}$ dans Set (les morphismes étant les transformations naturelles). On montrera qu'on a un isomorphisme naturel de foncteurs y entre foncteurs de $Set^{\mathcal{D}} \times \mathcal{D}$ dans Set.

2 R-modules

Exercice 3: (lemme des cinq)
Considérons le diagramme commutatif de R-modules

$$\begin{tikzcd}
M_1 \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "f_1"'] & M_2 \arrow[r, "\alpha_2"] \arrow[d, "f_2"'] & M_3 \arrow[r, "\alpha_3"] \arrow[d, "f_3"'] & M_4 \arrow[r, "\alpha_4"] \arrow[d, "f_4"'] & M_5 \arrow[d, "f_5"'] \\
N_1 \arrow[r, "\beta_1"'] & N_2 \arrow[r, "\beta_2"'] & N_3 \arrow[r, "\beta_3"'] & N_4 \arrow[r, "\beta_4"'] & N_5
\end{tikzcd}$$

où les lignes sont exactes. Montrer que :

1) Si f_1 est surjective et f_2 et f_4 sont injectives alors f_3 est injective.

2) Si f_5 est injective et f_2 et f_4 sont surjectives alors f_3 est surjective.

3) En déduire que si f_1, f_2, f_4 et f_5 sont des isomorphismes, alors f_3 aussi (c'est le *lemme des cinq*).

Exercice 4: (lemme du serpent)

1) Montrer qu'étant donné un carré commutatif de R-modules

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & B \arrow[d, "\beta"] \\ A' \arrow[r] & B' \end{tikzcd}$$

on peut le compléter d'une seule manière en un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\ \mathrm{Ker}\ \alpha \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Ker}\ \beta \arrow[d] \\ A \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & B \arrow[d, "\beta"] \\ A' \arrow[r] \arrow[d] & B' \arrow[d] \\ \mathrm{Coker}\ \alpha \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Coker}\ \beta \arrow[d] \\ 0 & 0 \end{tikzcd}$$

2) Soit un diagramme commutatif de R-modules

$$\begin{array}{ccccccc} & A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C & \longrightarrow 0 \\ & \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma & \\ 0 \longrightarrow & A' & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & C' & \end{array}$$

où les lignes sont exactes. Montrer qu'il existe un morphisme $\Delta : \mathrm{Ker}\ \gamma \longrightarrow \mathrm{Coker}\ \alpha$ qui rend la suite

$$\mathrm{Ker}\ \alpha \longrightarrow \mathrm{Ker}\ \beta \longrightarrow \mathrm{Ker}\ \gamma \xrightarrow{\Delta} \mathrm{Coker}\ \alpha \longrightarrow \mathrm{Coker}\ \beta \longrightarrow \mathrm{Coker}\ \gamma$$

exacte.

3) Montrer que si de plus $A \longrightarrow B$ est injective alors $\mathrm{Ker}\ \alpha \longrightarrow \mathrm{Ker}\ \beta$ l'est aussi, et si $B' \longrightarrow C'$ est surjective alors $\mathrm{Coker}\ \beta \longrightarrow \mathrm{Coker}\ \gamma$ l'est aussi.

Exercice 5: (encore une suite exacte)

Considérons deux morphismes de R-modules $A \xrightarrow{f} B$ et $B \xrightarrow{g} C$. Déterminer une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ker\ f} \longrightarrow \mathrm{Ker\ g \circ f} \longrightarrow \mathrm{Ker\ g} \longrightarrow \mathrm{Coker\ f} \longrightarrow \mathrm{Coker\ g \circ f} \longrightarrow \mathrm{Coker\ g} \longrightarrow 0.$$

Exercice 6: (suites scindées)

1) Soit $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ une suite exacte courte de R-modules. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

a) f admet une rétraction (i.e. il existe $B \xrightarrow{r} A$ tel que $rf = id_A$).

b) g admet une section (i.e. il existe $C \xrightarrow{s} B$ tel que $gs = id_C$).

c) f admet une rétraction r et g une section s telles que $fr + sg = id_B$.

d) Il existe un isomorphisme $B \xrightarrow{h} A \oplus C$ qui rend le diagramme suivant commutatif

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & B \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"', "h"] & C \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "i_A"'] & A \oplus C \arrow[r, "\pi_C"'] & C \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Lorsque ces propositions sont satisfaites, la suite est dite *scindée*.

2) Montrer que toute suite exacte courte d'espaces vectoriels est scindée.

3) Montrer que la suite exacte courte de $\mathbb{Z}$-modules $0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 0$ n'est pas scindée.

4) Déterminer toutes les suites exactes courtes de $\mathbb{Z}$-modules $0 \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 0$. Sont-elles scindées?

Exercice 7: (exactitude du foncteur Hom)

1) Soit $0 \longrightarrow M' \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} M''$ une suite exacte. Montrer que pour tout R-module N, on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow Hom_R(N, M') \xrightarrow{\alpha_*} Hom_R(N, M) \xrightarrow{\beta_*} Hom_R(N, M'')$$

2) Soit $M' \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} M'' \longrightarrow 0$ une suite exacte. Montrer que pour tout R-module N, on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow Hom_R(M'', N) \xrightarrow{\beta^*} Hom_R(M, N) \xrightarrow{\alpha^*} Hom_R(M', N)$$

3) Soit $0 \longrightarrow M' \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} M'' \longrightarrow 0$ une suite exacte scindée. Montrer que pour tout R-module N, on a des suites exactes

a) $0 \longrightarrow Hom_R(M'', N) \xrightarrow{\beta^*} Hom_R(M, N) \xrightarrow{\alpha^*} Hom_R(M', N) \longrightarrow 0$

b) $0 \longrightarrow Hom_R(N, M') \xrightarrow{\alpha_*} Hom_R(N, M) \xrightarrow{\beta_*} Hom_R(N, M'') \longrightarrow 0$

4) Démontrer qu'une suite $M' \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} M''$ est exacte dès lors que pour tout R-module N la suite $Hom_R(N, M') \xrightarrow{\alpha_*} Hom_R(N, M) \xrightarrow{\beta_*} Hom_R(N, M'')$ est exacte.

Remarque : les énoncés de cet exercice restent vrais dans une catégorie abélienne.