TD1 Exercice 2: Lemme de Yoneda

Correction proposée par Vincent BAGAYOKO

Remarques:

-La notation K_f pour un foncteur K et une flèche f dans la catétorie de départ désigne la valeur de K en cette flèche.

-Les compositions dans $\mathcal{D}$ et $\mathcal{S}$et sont omises.

1) Soit $\alpha : \mathcal{D}(r,-) \to K$ une transformation naturelle.
Soit $s \in \mathcal{D}$, soit $f : r \to s$ dans $\mathcal{D}$.
$K_f \alpha_r = \alpha_s \mathcal{D}(r,-)_f$.
En évaluant ces expressions en 1_r, on obtient
$K_f \alpha_r(1_r) = \alpha_s(f)$.
Ainsi, α_s (qui est une application) est déterminé par K et $\alpha_r(1_r)$, et il en est de même pour α.
On en déduit que $y_{(K,r)}$ est injective.

Si $K(r)$ est vide, α_r et $y_{(K,r)}$ sont l'application vide $\varnothing \to \varnothing$, qui est surjective.

Sinon, étant donné un élément x de $K(r)$, on peut en s'inspirant de ce qui précède considérer la famille $({\alpha^x}_s)_{s \in \mathcal{D}}$ de flèches ${\alpha^x}_s : \mathcal{D}(r,s) \to K(s)$ données par $\forall f : r \to s, {\alpha^x}_s(f) := K_f(x)$.

C'est bien une transformation naturelle, en effet pour $g : s' \to s$ et $f : r \to s'$ dans $\mathcal{D}$,
$K_g {\alpha^x}_{s'}(f) = K_g K_f(x) = K_{gf}(x) = {\alpha^x}_s(gf) = {\alpha^x}_s \mathcal{D}(r,-)_g(f)$. D'où $K_g {\alpha^x}_{s'} = {\alpha^x}_s \mathcal{D}(r,-)_g$.
Il est clair de plus que ${\alpha^x}_r(1_r) = 1_r(x) = x$. Cela prouve que $y_{(K,r)}$ est surjective.

2) Soit $\alpha : \mathcal{D}(r,-) \to \mathcal{D}(s,-)$ une transformation naturelle.
α est déterminé par $y_{(\mathcal{D}(s,-),r)}(\alpha) = \alpha_r(1_r) : s \to r$ selon la formule
$\forall s' \in \mathcal{D}, \forall f : r \to s'$ dans $\mathcal{D}, \alpha_{s'}(f) = \mathcal{D}(s',-)_f(\alpha_r(1_r)) = f\alpha_r(1_r)$.
Ainsi, $h := \alpha_r(1_r)$ est l'unique flèche $s \to r$ telle que α est la transformation de pré-composition par h. (on peut vérifier l'unicité en prenant $s' = r$ et $f = 1_r$)

3) -On note $\mathcal{N} : \mathcal{S}\text{et}^{\mathcal{D}} \times \mathcal{D} \to \mathcal{S}\text{et}$ le foncteur donné sur les objets par $(K,r) \mapsto Nat(\mathcal{D}(r,-),K)$ et sur les flèches $(\alpha,f) : (K',r') \to (K,r)$ par $\mathcal{N}_{(\alpha,f)} := \begin{pmatrix} Nat(\mathcal{D}(r',-),K') \longrightarrow Nat(\mathcal{D}(r,-),K) \\ \beta \longmapsto \alpha \circ \beta \circ f^\star \end{pmatrix}$.

-On note $\mathcal{E} : \mathcal{S}\text{et}^{\mathcal{D}} \times \mathcal{D} \to \mathcal{S}\text{et}$ le foncteur donné sur les objets par $(K,r) \mapsto K(r)$ et sur les flèches $(\alpha,f) : (K',r') \to (K,r)$ par $\mathcal{E}_{(\alpha,f)} := K_f \alpha_{r'}$.

Montrons que y est une transformation naturelle $\mathcal{N} \to \mathcal{E}$.
Soient $(K,r),(K',r') \in \mathcal{S}\text{et}^{\mathcal{D}} \times \mathcal{D}$, soit $(\alpha,f) : (K',r') \to (K,r)$.
On considère $\beta : \mathcal{D}(r',-) \to K'$ une transformation naturelle.
$y_{(K,r)}\mathcal{N}_{(\alpha,f)}(\beta) = (\alpha \circ \beta \circ f^\star)_r(1_r) = \alpha_r \beta_r(f)$.
$\mathcal{E}_{(\alpha,f)} y_{(K',r')}(\beta) = K_f \alpha_{r'} \beta_{r'}(1_{r'}) \underset{\alpha\ nat}{=} \alpha_r K'_f \beta_{r'}(1_{r'}) \underset{\beta\ nat}{=} \alpha_r \beta_r \mathcal{D}(r',-)_f(1_{r'}) = \alpha_r \beta_r(f)$.
On a donc $y_{(K,r)}\mathcal{N}_{(\alpha,f)} = \mathcal{E}_{(\alpha,f)} y_{(K',r')}$, ce qui prouve que y est naturelle.
(y est donc un isomorphisme)