EXERCICE 2

par

Tongyu CHEN

***Théorème 0.1* (Lemme de Yoneda).** — *Soit $\mathcal{D}$ une petite catégorie, $K : \mathcal{D} \to Set$ un foncteur et r un objet de $\mathcal{D}$. On note $Nat(\mathcal{D}(r, \cdot), K)$ l'ensemble des transformations naturelles entres les foncteurs $\mathcal{D}(r, \cdot)$ et K. Alors*

1. *l'application*
$$y_{(K,r)} : \quad Nat(\mathcal{D}(r, \cdot), K) \to K(r)$$
$$\alpha \mapsto \alpha_r(1_r)$$
est bijective
2. *Quels que soit les objets r et s de $\mathcal{D}$, toute transformation naturelle α entre les foncteurs $\mathcal{D}(r, \cdot)$ et $\mathcal{D}(s, \cdot)$ est de la forme $\mathcal{D}(h, \cdot)$ pour un unique morphisme $h : s \to r$, où $h = \alpha_r(1_r)$.*
3. *L'application $y_{(K,r)}$ est naturelle en K et r. Formellement, on note $Set^{\mathcal{D}}$ la catégorie des foncteurs de $\mathcal{D}$ dans Set (les morphismes étant les transformations naturelles). On a un isomorphisme naturel de foncteurs y entre foncteurs de $Set^{\mathcal{D}} \times \mathcal{D}$ dans Set.*

Démonstration. — 1. Injectivité:Soient $\forall s \in Ob(\mathcal{D})$, $\forall f \in \mathcal{D}(r, s)$ et $1_r \in \mathcal{D}(r, r)$. Le diagramme commute

$$\begin{tikzcd} \mathcal{D}(r,r) \arrow[r, "\alpha_r"] \arrow[d, "f_* = \mathcal{D}(r,f)"'] & K(r) \arrow[d, "K(f)"] \\ \mathcal{D}(r,s) \arrow[r, "\alpha_s"] & K(s) \end{tikzcd}$$

Alors $K(f)(\alpha_r(1_r)) = (\alpha_s \circ f_*)(1_r) = \alpha_s(f)$, i.e., α est uniquement déterminé par $\alpha_r(1_r)$ d'où l'injectivité.

Surjectivité: Il suffit de montrer que $\forall x \in K(r)$, la formule $\alpha_s(g) = K(g)(x)$, pour $\forall g \in \mathcal{D}(r, s)$ et $\forall s \in Ob(\mathcal{D})$, définit bien une transformation naturelle α.

Pour $\forall s' \in Ob(\mathcal{D})$ et $\forall f \in \mathcal{D}(s,s')$, on considère le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{D}(r,s) \arrow[r, "\alpha_s"] \arrow[d, "f_*=\mathcal{D}(r,f)"'] & K(s) \arrow[d, "K(f)"] \\
\mathcal{D}(r,s') \arrow[r, "\alpha_{s'}"] & K(s')
\end{tikzcd}$$

Puisque

$$\alpha_{s'}(f_*(g)) = \alpha_{s'}(f \circ g) = K(f \circ g)(x) = K(f) \circ K(g)(x) = K(f)(\alpha_s(g)),$$

le diagramme commute. De plus, $\alpha_r(1_r) = K(1_r)(x) = 1_{K(r)}(x) = x$. On conclut.

2. En supposant $K = \mathcal{D}(s,\cdot)$ et $h = \alpha_r(1_r) \in \mathcal{D}(s,r)$, par (1) on a pour tout $f \in \mathcal{D}(r,t)$

$$\alpha_t(f) = K(f)(h) = \mathcal{D}(s,f)(h) = f \circ h = \mathcal{D}(h,t)(f).$$

Donc α est de la forme $\mathcal{D}(h,\cdot)$.

Maintenant, si on a $\alpha = \mathcal{D}(h,\cdot)$, $\alpha_r(1_r) = 1_r \circ h = h$, d'où l'unicité.

3. Soit $(H,f) \in Set^{\mathcal{D}} \times \mathcal{D}((K,r),(K',r'))$. On a deux foncteurs de $Set^{\mathcal{D}} \times \mathcal{D}$ à Set.

$$N : \qquad (K,r) \longrightarrow \mathrm{Nat}(\mathcal{D}(r,\cdot),K)$$

$$\begin{tikzcd}
(K,r) \arrow[d, "{(H,f)}"] & \mathrm{Nat}(\mathcal{D}(r,\cdot),K) \arrow[d, "{\mathrm{Nat}(\mathcal{D}(f,\cdot),H)}"] & \ni \alpha \arrow[d, mapsto] \\
(K',r') & \mathrm{Nat}(\mathcal{D}(r',\cdot),K') & \ni \beta
\end{tikzcd}$$

où on a $\beta = H \circ \alpha \circ \mathcal{D}(f,\cdot)$.

$$E : \qquad (K,r) \longrightarrow K(r)$$

$$\begin{tikzcd}
(K,r) \arrow[d, "{(H,f)}"] & K(r) \arrow[d, "H(f)"] & \ni h \arrow[d, mapsto] \\
(K',r') & K'(r') & \ni h'
\end{tikzcd}$$

où $H(f) = K'(f) \circ H_r = H_{r'} \circ K(f)$.

On considère le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Nat}(\mathcal{D}(r,\cdot),K) \arrow[r, "y_{(K,r)}"] \arrow[d, "\mathrm{Nat}(\mathcal{D}(f,\cdot),H)"'] & K(r) \arrow[d, "H(f)"] \\
\mathrm{Nat}(\mathcal{D}(r',\cdot),K') \arrow[r, "y_{(K',r')}"] & K'(r')
\end{tikzcd}$$

On vérifie bien que ce diagramme commute. Par (1), $y_{K,r}$ est bijective, i.e. isomorphisme de la catégorie Set, alors $y : N \to E$ est bien un isomorphisme naturel de foncteurs.

$\square$

Références

September 2017

Tongyu CHEN