Laura Charvolin - 22 septembre 2017

TD1 - exercice 3 - Le lemme des cinq

Question 1

Montrons que f_3 est injective.
Soient x dans M_3 tel que $f_3(x) = 0$. On a alors $\beta_3 f_3(x) = 0$.
Comme le diagramme commute, cela équivaut à $f_4\alpha_3(x) = 0$.
Or on sait que f_4 est injective, on a donc $\alpha_3(x) = 0$, c'est-à-dire $x \in \ker(\alpha_3)$ qui est l'image de α_2 car la première ligne est exacte.
Prenons un élément z dans M_2 tel que $x = \alpha_2(z)$. Il suffit de montrer que $\alpha_2(z) = 0$
En appliquant f_3 à l'équation précédente, on obtient $f_3(x) = f_3\alpha_2(z)$. Or, comme on avait pris x dans le noyau de f_3, on obtient finalement $f_3\alpha_2(z) = 0$.
Comme le diagramme commute, c'est équivalent à $\beta_2 f_2(z) = 0$
$f_2(z)$ est donc un élément de $\ker(\beta_2)$ qui est l'image de β_1 car la deuxième ligne est exacte.
Prenons un élément t de N_1 tel que $f_2(z) = \beta_1(t)$.
Comme f_1 est surjective, il existe u dans M_1 tel que $t = f_1(u)$.
On a donc $f_2(z) = \beta_1 f_1(u) = f_2\alpha_1(u)$ car le diagramme commute.
Comme f_2 est injective, on obtient $z = \alpha_1(u)$.
Donc $\alpha_2(z) = \alpha_2\alpha_1(u) = 0$ car la première ligne est exacte.
Donc $x = 0$ et f_3 est injective. QED

Question 2

Montrons que f_3 est surjective.
Soit $y \in N_3$.
On a $\beta_3(y) \in N_4$ et f_4 est surjective, donc il existe t dans M_4 tel que $\beta_3(y) = f_4(t)$.
Comme la deuxième ligne est exacte, $0 = \beta_4\beta_3(y) = \beta_4 f_4(t) = f_5\alpha_4(t)$ car le diagramme commute.
Comme f_5 est injective, on a $\alpha_4(t) = 0$.
Or le noyau de α_4 est l'image de α_3 ; appelons x un élément de M_3 tel que $t = \alpha_3(x)$.
On obtient $\beta_3(y) = f_4\alpha_3(x) = \beta_3 f_3(x)$, donc par linéarité $y - f_3(x)$ est dans le noyau de β_3, qui est l'image de β_2.
Soit z dans N_2 tel que $y - f_3(x) = \beta_2(z)$.
Comme f_2 est surjective, il existe u dans M_2 tel que $z = f_2(u)$, donc $y - f_3(x) = \beta_2 f_2(u) = f_3\alpha_2(u)$ car le diagramme commute.
On obtient alors par linéarité $y = f_3(x + \alpha_2(u))$, donc f_3 est bien surjective. QED

Question 3

Si f_1, f_2, f_4, et f_5 sont des isomorphismes, alors on peut appliquer les questions 1 et 2 (on a même une hypothèse plus forte), et on obtient que f_3 est injective et surjective, c'est donc un isomorphisme.