TD1– Solution de l'exercice 4 (lemme du serpent) proposée par Daniel Zimmer.

Exercice 4: lemme du serpent

1) Montrer qu'étant donné un carré commutatif de R-modules

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & B \arrow[d, "\beta"] \\
A' \arrow[r] & B'
\end{tikzcd}$$

on peut le compléter d'une seule manière en un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
\text{Ker } \alpha \arrow[r] \arrow[d] & \text{Ker } \beta \arrow[d] \\
A \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & B \arrow[d, "\beta"] \\
A' \arrow[r] \arrow[d] & B' \arrow[d] \\
\text{Coker } \alpha \arrow[r] \arrow[d] & \text{Coker } \beta \arrow[d] \\
0 & 0
\end{tikzcd}$$

2) Soit un diagramme commutatif de R-modules

$$\begin{array}{ccccccc}
 & A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C & \longrightarrow 0 \\
 & \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma & \\
0 \longrightarrow & A' & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & C' &
\end{array}$$

où les lignes sont exactes. Montrer qu'il existe un morphisme $\Delta : \text{Ker } \gamma \longrightarrow \text{Coker } \alpha$ qui rend la suite

$$\text{Ker } \alpha \longrightarrow \text{Ker } \beta \longrightarrow \text{Ker } \gamma \xrightarrow{\Delta} \text{Coker } \alpha \longrightarrow \text{Coker } \beta \longrightarrow \text{Coker } \gamma$$

exacte.

3) Montrer que si de plus $A \longrightarrow B$ est injective alors $\text{Ker } \alpha \longrightarrow \text{Ker } \beta$ l'est aussi, et si $B' \longrightarrow C'$ est surjective alors $\text{Coker } \beta \longrightarrow \text{Coker } \gamma$ l'est aussi.

Solution: 1) Pour faciliter la discussion, nommons les deux flèches horizontales :

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"] & B \arrow[d, "\beta"] \\
A' \arrow[r, "f'"] & B'
\end{tikzcd}$$

La façon de compléter ce diagramme "verticalement" est évidente, il suffit de prendre les noyaux et conoyaux munis de leurs flèches respectives, injections canoniques pour les premiers et projections canoniques pour les seconds. Le seul point sensible est la définition des morphismes horizontaux $\text{Ker } \alpha \longrightarrow \text{Ker } \beta$ et $\text{Coker } \alpha \longrightarrow \text{Coker } \beta$. Pour le premier, remarquons que si $i_\alpha : \text{Ker } \alpha \longrightarrow A$ et $i_\beta : \text{Ker } \beta \longrightarrow B$ sont les flèches canoniques des noyaux, la composée $\beta f i_\alpha$ est nulle. En effet, par commutativité du carré initial,

$$\beta f i_\alpha = f' \alpha i_\alpha = f' 0 = 0.$$

La propriété universelle du noyau de β nous donne donc un unique morphisme $\bar{f} : \text{Ker } \alpha \longrightarrow \text{Ker } \beta$ tel que $i_\beta \bar{f} = f i_\alpha$. De manière duale, la propriété universelle du conoyau nous fournit un unique morphisme $\underline{f'} : \text{Coker } \alpha \longrightarrow \text{Coker } \beta$ faisant commuter le diagramme.

On peut en fait voir que $\bar{f}$ est simplement la restriction de f à Ker α et $\underline{f'}$ envoie une classe $a' + \mathrm{Im}\ \alpha$ sur la classe $f'(a') + \mathrm{Im}\ \beta$.

2) Considérons le diagramme

$$\begin{tikzcd}
 & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"] & C \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "f'"] & B' \arrow[r, "g'"] & C' &
\end{tikzcd}$$

où les lignes sont exactes. Par la première partie, il existe une seule manière de le compléter en un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{Ker}\ \alpha \arrow[r, "\bar{f}"] \arrow[d, "i_\alpha"] & \mathrm{Ker}\ \beta \arrow[r, "\bar{g}"] \arrow[d, "i_\beta"] & \mathrm{Ker}\ \gamma \arrow[d, "i_\gamma"] & \\
 & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"] & C \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "\pi_\alpha"] & B' \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "\pi_\beta"] & C' \arrow[d, "\pi_\gamma"] & \\
 & \mathrm{Coker}\ \alpha \arrow[r, "\underline{f'}"] & \mathrm{Coker}\ \beta \arrow[r, "\underline{g'}"] & \mathrm{Coker}\ \gamma &
\end{tikzcd}$$

Nous allons construire un morphisme $\Delta : \mathrm{Ker}\ \gamma \longrightarrow \mathrm{Coker}\ \alpha$ ayant les propriétés demandées. Soit $k \in \mathrm{Ker}\ \gamma$, en fait $k = i_\gamma(k) \in C$. Par exactitude, g est surjectif, et donc il existe $b \in B$ tel que $g(b) = k$. Considérons $b' = \beta(b)$. La commutativité nous donne

$$g'(b') = g'\beta(b) = \gamma g(b) = \gamma(k) = 0,$$

donc $b' \in \mathrm{Ker}\ g' = \mathrm{Im}\ f'$ et, puisque f' est injectif par exactitude, il existe un unique $a' \in A'$ tel que $f'(a') = b$. Posons alors $\Delta(k) = \pi_\alpha(a') = a' + \mathrm{Im}\ \alpha$.

Cette définition ne dépend pas du choix d'une pré-image de k dans B. En effet, soit $\tilde{b} \in B$ tel que $g(\tilde{b}) = k$. Alors, soit $\tilde{b}' = \beta(\tilde{b})$, et soit $\tilde{a}' \in A'$ l'unique élément tel que $f'(\tilde{a}') = \tilde{b}'$. Nous avons

$$0 = k - k = g(b) - g(\tilde{b}) = g(b - \tilde{b}),$$

donc $b - \tilde{b} \in \mathrm{Ker}\ g = \mathrm{Im}\ f$ et il existe $\bar{a} \in A$ tel que $b - \tilde{b} = f(\bar{a})$. De plus, par commutativité,

$$f'\alpha(\bar{a}) = \beta f(\bar{a}) = \beta(b - \tilde{b}) = \beta(b) - \beta(\tilde{b}) = b' - \tilde{b}' = f'(a' - \tilde{a}'),$$

et puisque f' et injectif, nous en déduisons que $\alpha(\bar{a}) = a' - \tilde{a}'$, c'est-à-dire que

$$\pi_\alpha(a') = a' + \mathrm{Im}\ \alpha = \tilde{a}' + \mathrm{Im}\ \alpha = \pi_\alpha(\tilde{a}'),$$

ce qui montre que Δ est bien définie. De plus, on montre aisément que Δ est un morphisme de R-modules. On a par ailleurs

$$\Delta\bar{g} = 0 \tag{1}$$

En effet, Soit $b \in \mathrm{Ker}\ \beta \subseteq B$. Alors en particulier b est un choix de pré-image de $\bar{g}(b)$ dans B. Comme $\beta(b) = 0$, on en déduit que $\Delta\bar{g}(b) = 0$. De même

$$\underline{f'}\Delta = 0 \tag{2}$$

En effet, si $\Delta(k) = a' + \mathrm{Im}\ \alpha$, avec $f'(a') = \beta(b)$ et $g(b) = k$ alors

$$\underline{f'}(a' + \mathrm{Im}\ \alpha) = f'(a') + \mathrm{Im}\ \beta = \beta(b) + \mathrm{Im}\ \beta = 0.$$

Il reste à vérifier que la flèche Δ ainsi définie rend bien la suite

$$\mathrm{Ker}\ \alpha \xrightarrow{\bar{f}} \mathrm{Ker}\ \beta \xrightarrow{\bar{g}} \mathrm{Ker}\ \gamma \xrightarrow{\Delta} \mathrm{Coker}\ \alpha \xrightarrow{\underline{f'}} \mathrm{Coker}\ \beta \xrightarrow{\underline{g'}} \mathrm{Coker}\ \gamma$$

exacte. Commençons par l'exactitude en Ker γ. On sait déjà par l'equation (**??**) que $\mathrm{Im}\ \bar{g} \subseteq \mathrm{Ker}\ \Delta$. Soit $k \in \mathrm{Ker}\ \Delta$, c'est-à-dire que si $b \in B$ est tel que $g(b) = k$, si $b' = \beta(b)$ et $a' \in A'$ est l'unique élément tel que $f'(a') = b'$, alors $\pi_\alpha(a') = a' + \mathrm{Im}\ \alpha = 0$. Ou de manière équivalente, $a' \in \mathrm{Im}\ \alpha$. Soit donc $a \in A$ tel que $\alpha(a) = a'$. Observons que

$$\beta(f(a)) = \beta f(a) = f'\alpha(a) = f'(a') = b' = \beta(b),$$

et donc $\beta(b - f(a)) = 0$, c'est-à-dire que $b - f(a) \in \mathrm{Ker}\ \beta$. On peut donc calculer

$$\bar{g}(b - f(a)) = g(b - f(a)) = g(b) - gf(a) = g(b) - 0 = k,$$

et donc $k \in \text{Im } \bar{g}$. Ceci montre que $\text{Im } \bar{g} = \text{Ker } \Delta$.

Montrons l'exactitude en Coker α. On sait déjà par l'equation (**??**) que $\text{Im } \Delta \subseteq \text{Ker } \underline{f'}$. Soit $a' + \text{Im } \alpha \in \text{Ker } \underline{f'}$, en particulier,

$$0 = \underline{f'}(a' + \text{Im } \alpha) = \pi_\beta(f'(a')) = f'(a') + \text{Im } \beta,$$

et donc $f'(a') \in \text{Im } \beta$. Soit $b \in B$ tel que $\beta(b) = f'(a')$, considérons $k = g(b)$. Il est clair que $\Delta(k) = a' + \text{Im } \alpha$. En effet, b est une pré-image de k dans B, et $a' \in A'$ est l'unique élément tel que $f'(a') = \beta(b)$, donc $\Delta(k) = \pi_\alpha(a') = a' + \text{Im } \alpha$. Ceci montre que $\text{Ker } \underline{f'} \subseteq \text{Im } \Delta$.

Soit finalement $a' + \text{Im } \alpha = \Delta(k)$, pour un certain $k \in \text{Ker } \gamma$. Si $b \in B$ est une pré-image de k, l'unique $a'' \in A'$ tel que $f'(a'') = \beta(b)$ est envoyé, par définition, sur $\Delta(k)$ et donc appartient à la classe $a' + \text{Im } \alpha$. Donc

$$\underline{f'}(a' + \text{Im } \alpha) = f'(a'') + \text{Im } \beta = \beta(b) + \text{Im } \beta = 0.$$

Nous en déduisons que $\text{Im } \Delta = \text{Ker } \underline{f'}$, et donc la suite est exacte en Coker α.

Il reste à montrer l'exactitude en Ker β et en Coker β. On sait déjà que $\bar{g}\bar{f} = 0 = \underline{g'}\,\underline{f'}$.

Soit $b \in \text{Ker } \bar{g}$. Comme $gi_\beta(b) = 0$ il existe $a \in A$ tel que $f(a) = i_\beta(b)$. Mais $f'\alpha(a) = \beta f(a) = 0$ et f' est injective donc $\alpha(a) = 0$ et $a \in \text{Ker } \alpha$ s'écrit $i_\alpha(a)$. Donc $\bar{f}(a) = b$ et $\text{Ker } \bar{g} \subseteq \text{Im } \bar{f}$. La suite est donc exacte en Ker β.

Soit $b' + \text{Im } \beta \in \text{Ker } \underline{g'}$. Par définition des conoyaux, on a donc $g'(b') \in \text{Im } \gamma$. Par surjectivité de g on a $g'(b') = \gamma(g(b)) = g'(\beta(b))$ pour un certain $b \in B$. Donc $b' - \beta(b) \in \text{Ker } g' = \text{Im } f'$. Donc il existe $a' \in A'$ tel que $b' - \beta(b) = f'(a')$. Ceci implique que $b' + \text{Im } \beta = \underline{f'}(a' + \text{Im } \alpha)$. Ceci termine la preuve.

3) En utilisant la remarque faite à la fin de la solution de la première partie, il est évident que si $f : A \longrightarrow B$ est injective, la flèche induite sur les noyaux $\bar{f} : \text{Ker } \alpha \longrightarrow \text{Ker } \beta$ sera injective puisqu'il s'agit simplement de la restriction $f_{|\text{Ker } \alpha}$. Si maintenant le morphisme $g' : B' \longrightarrow C'$, est surjectif, montrons que le morphisme induit $\underline{g'} : \text{Coker } \beta \longrightarrow \text{Coker } \gamma$ l'est lui aussi. Soit $c' + \text{Im } \gamma \in \text{Coker } \gamma$, la surjectivité de g' implique l'existence de $b' \in B'$ tel que $g'(b') = c'$ et donc

$$\underline{g'}(b' + \text{Im } \beta) = g'(b') + \text{Im } \gamma = c' + \text{Im } \gamma.$$

En particulier, on en déduit qu'un diagramme

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"] & C \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "f'"] & B' \arrow[r, "g'"] & C' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

induit une suite exacte

$$0 \longrightarrow \text{Ker } \alpha \longrightarrow \text{Ker } \beta \longrightarrow \text{Ker } \gamma \xrightarrow{\Delta} \text{Coker } \alpha \longrightarrow \text{Coker } \beta \longrightarrow \text{Coker } \gamma \longrightarrow 0.$$