TD 1, Exercice 5

Solution proposée par Aleksandar Miladinovic

Exercice 5: (encore une suite exacte) Considérons deux morphismes de R-modules $A \xrightarrow{\text{f}} B$ et $B \xrightarrow{\text{g}} C$. Déterminer une suite exacte

$$0 \to Kerf \xrightarrow{\text{i}} Kerg \circ f \xrightarrow{\bar{f}} Kerg \xrightarrow{\pi} Cokerf \xrightarrow{\widetilde{g}} Cokerg \circ f \xrightarrow{\text{j}} Cokerg \to 0$$

Solution:

On definit inclusion $i : Kerf \to Kerg \circ f, \quad i : x \mapsto x$

<u>Bien defini:</u>

$x \in Kerf \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow g(f(x)) = 0 \Rightarrow x \in Kerg \circ f$

i est un inclusion $\Rightarrow i$ est injectif.

$\Rightarrow 0 \to Kerf \to Kerg \circ f$, est exact.

On definit une apllication $\bar{f}$ induit par l'application f:

$\bar{f} : Kerg \circ f \to Kerg, \quad \bar{f} : x \mapsto f(x)$

<u>Bien defini:</u>

$x \in Kerg \circ f \Rightarrow g(f(x)) = g(\bar{f}(x)) = 0 \Rightarrow f(\bar{x}) \in Kerg$

$x \in Kerf \Rightarrow \bar{f}(i(x)) = \bar{f}(x) = f(x) = 0 \Rightarrow Imi \subseteq Ker\bar{f}$

$y \in Ker\bar{f} \Rightarrow \bar{f}(y) = f(y) = 0 \Rightarrow y \in Kerf \Rightarrow Imi \supseteq Ker\bar{f}$

$\Rightarrow Kerf \to Kerg \circ f \to Kerg$, est exact.

On definit la projection: $\pi : Kerg \to Cokerf, \quad \pi : x \mapsto [x]$

Il est bien defini.

$x \in Kerg \circ f \Rightarrow \pi(\bar{f}(x)) = \pi(f(x)) = [f(x)] = [0] \Rightarrow Im\bar{f} \subseteq Ker\pi$

$y \in Ker\pi \Rightarrow \exists x \in A, f(x) = y$, mais $y \in Ker\pi \subseteq Kerg \Rightarrow 0 = g(y) = g(f(x)) \Rightarrow x \in Kerg \circ f \Rightarrow$
$y = f(x) = \bar{f}(x) \Rightarrow y \in Im\bar{f}$

$\Rightarrow Kerg \circ f \to Kerg \to Cokerf$, est exact.

On definit une apllication $\widetilde{g}$ induit par l'application g: $\widetilde{g} : Cokerf \to Cokerg \circ f, \quad \widetilde{g} : [x] \mapsto [g(x)]$

<u>Bien defini:</u>

$\widetilde{g}[x + f(x')] = [g(x + f(x'))] = [g(x) + g(f(x'))] = [g(x)]$

$x \in Kerg \Rightarrow \widetilde{g}(\pi(x)) = \widetilde{g}([x]) = [g(x)] = [0] \Rightarrow Im\pi \subseteq Ker\widetilde{g}$

$[y] \in Ker\widetilde{g} \Rightarrow g(y) \in Img \circ f \Rightarrow \exists x \in A,\ g(y) = g(f(x)) \Rightarrow g(y) - g(f(x)) = g(y - f(x)) = 0 \Rightarrow$
$y - f(x) \in Kerg \Rightarrow \pi(y - f(x)) = [y - f(x)] = [y] \Rightarrow Ker\widetilde{g} \subseteq Im\pi$

$\Rightarrow Kerg \to Cokerf \to Cokerg \circ f$, est exact.

On definit une application j: $j : Cokerg \circ f \to Cokerg, \quad j : [x] \mapsto [x]$

$Img \circ f \subseteq Img \Rightarrow j$ est bien definit.

$[x] \in Cokerf \Rightarrow j(\widetilde{g}([x])) = j([g(x)]) = [g(x)] = [0] \Rightarrow Im\widetilde{g} \subseteq Kerj$

$[y] \in Kerj \Rightarrow y \in Img \Rightarrow \exists x \in B, g(x) = y \Rightarrow \widetilde{g}([x]) = [y] \Rightarrow Kerj \subseteq Im\widetilde{g}$

$\Rightarrow Cokerf \to Cokerg \circ f \to Cokerg$, est exact.

$\forall [x] \in Cokerg,\ j([x]) = [x] \Rightarrow j$ est surjectif

$\Rightarrow Cokerg \circ f \to Cokerg \to 0$, est exact.