Algèbre homologique et topologie algébrique
Séance de TD n°1 - exercice 7

Correction proposée par Tongyu Chen

Exercice 7– [Exactitude du foncteur Hom] On considère les foncteur $\mathrm{Hom}_R(N, \cdot), \mathrm{Hom}_R(\cdot, N) : {}_RMod \to \mathcal{S}$ où $\mathcal{S}$ est la catégorie des groups abeliens.

1. Soit $0 \to M' \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} M''$ une suite exacte. Alors pour tout R-module N, on a une suite exacte

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(N, M') \xrightarrow{\alpha_*} \mathrm{Hom}_R(N, M) \xrightarrow{\beta_*} \mathrm{Hom}_R(N, M'')$$

2. Soit $M' \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} M'' \to 0$ une suite exacte. Alors pour tout R-module N, on a une suite exacte

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(M'', N) \xrightarrow{\beta^*} \mathrm{Hom}_R(M, N) \xrightarrow{\alpha^*} \mathrm{Hom}_R(M', N)$$

3. Soit $0 \to M' \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} M'' \to 0$ une suite exacte scindée. Alors pour tout R-module N, on a des suites exactes

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(N, M') \xrightarrow{\alpha_*} \mathrm{Hom}_R(N, M) \xrightarrow{\beta_*} \mathrm{Hom}_R(N, M'') \to 0$$
$$0 \to \mathrm{Hom}_R(M'', N) \xrightarrow{\beta^*} \mathrm{Hom}_R(M, N) \xrightarrow{\alpha^*} \mathrm{Hom}_R(M', N) \to 0$$

4. Si pour tout R-module N, on a la suite exacte

$$\mathrm{Hom}_R(N, M') \xrightarrow{\alpha_*} \mathrm{Hom}_R(N, M) \xrightarrow{\beta_*} \mathrm{Hom}_R(N, M''),$$

alors la suite

$$M' \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} M''$$

est exacte.

Solution–

1) Il suffit de montrer $\ker(\alpha_*) = 0$ et $\mathrm{Im}(\alpha_*) = ker(\beta_*)$.

Soit $f \in ker(\alpha_*) \subset \mathrm{Hom}_R(N, M')$, $\alpha_*(f) = \alpha \circ f = 0$, le fait que α est un monomorphisme implique $f = 0$. Donc $\ker(\alpha_*) = 0$.

Soit $f \in \mathrm{Hom}_R(N, M')$, $\beta_* \circ \alpha_*(f) = (\beta \circ \alpha) \circ f = 0$, donc $\mathrm{Im}(\alpha_*) \subset ker(\beta_*)$. Soit $g \in ker(\beta_*)$, alors $\beta \circ g = \beta_*(g) = 0$. Comme la suite $0 \to M' \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} M''$ est exacte, on a $M' \xrightarrow{\alpha} M$ est isomorphe à $Ker\beta \xrightarrow{i_\beta} M$ et donc par propriété universelle du noyau, g se factorise par α, donc $g \in \mathrm{Im}(\alpha_*)$. Donc $\mathrm{Im}(\alpha_*) = ker(\beta_*)$.

2) Il suffit de montrer $\ker(\beta^*) = 0$ et $\mathrm{Im}(\beta^*) = ker(\alpha^*)$.

Soit $f \in ker(\beta_*) \subset \mathrm{Hom}_R(M'', N)$, $\beta^*(f) = f \circ \beta = 0$, le fait que β est un épimorphisme implique $f = 0$. Donc $\ker(\beta^*) = 0$.

Soit $f \in \mathrm{Hom}_R(M'', N)$, $\alpha^* \circ \beta^*(f) = f \circ (\beta \circ \alpha) = 0$, donc $\mathrm{Im}(\beta^*) \subset ker(\alpha^*)$. Soit $g \in ker(\alpha^*)$, alors $g \circ \alpha = \alpha^*(g) = 0$. Comme la suite $M' \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} M'' \to 0$ est exacte la flèche $M \xrightarrow{\beta} M''$ s'identifie au conoyau de α et donc, par propriété universelle du conoyau, g se factorise par β, donc $g \in \mathrm{Im}(\beta^*)$. Donc $\mathrm{Im}(\beta^*) = ker(\alpha^*)$.

3) a) Il suffit de montrer que α^* est un epimorphisme. Soit $f \in \mathrm{Hom}_R(M', N)$, $f = f \circ Id_{M'} = f \circ (r \circ \alpha) = \alpha^*(f \circ r) \in \mathrm{Im}(\alpha^*)$, où r est une rétraction de α tel que $r \circ \alpha = Id_{M'}$.

   b) Il suffit de montrer que β_* est un epimorphisme. Soit $f \in \mathrm{Hom}_R(N, M'')$, $f = Id_{M''} \circ f = (\beta \circ s) \circ f = \beta_*(s \circ f) \in \mathrm{Im}(\beta_*)$, où s est une section de β tel que $\beta \circ s = Id_{M''}$.

4) Dans une catégorie abélienne, on a une factorisation de $\alpha = me$ où m est un monomorphisme :

$$M' \xrightarrow{e} \mathrm{Im}(\alpha) \xrightarrow{m} M \xrightarrow{\beta} M''$$

L'exactitude de la suite de Hom implique $\forall g \in \mathrm{Hom}_R(N, M)$ tel que $\beta \circ g = 0$, il existe $f \in \mathrm{Hom}_R(N, M')$ tel que $g = \alpha f = mef$. En posant $u := ef$, on a $g = mu$. Comme m est un monomorphisme, u est unique. Ainsi on a montré que $m : \mathrm{Im}(\alpha) \to M$ a la propriété universelle de $ker\beta \to M$. Donc $\mathrm{Im}(\alpha) = ker(\beta)$.

Autre solution du 4): En prenant $N = R$ et en utilisant les isomorphismes de groupes abéliens $\varphi : \mathrm{Hom}_R(R, M) \to M$ avec $\varphi(f) = f(1)$ et $\varphi^{-1}(m) = f_m$ avec $f_m(r) = r \cdot m$, on obtient le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_R(R, M') \arrow[r, "\alpha_*"] \arrow[d, "\varphi"'] & \mathrm{Hom}_R(R, M) \arrow[r, "\beta_*"] \arrow[d, "\varphi"'] & \mathrm{Hom}_R(R, M'') \arrow[d, "\varphi"'] \\
M' \arrow[r, "\alpha"] & M \arrow[r, "\beta"] & M''
\end{tikzcd}$$

et comme φ est un isomorphisme on en déduit que la suite du bas est exacte.