Séance de TD n°2

22 septembre 2016

Complexes de chaines, projectifs et injectifs.

1 Complexes

Exercice 1: (quelques exemples)

1) Pour tout $n \geqslant 0$ on pose $C_n = \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$, et $C_n = 0$ pour $n < 0$. Soit $d_n : C_n \to C_{n-1}$ définie par $d_n(x) = 4x$. Montrer que (C, d) est un complexe de chaines de $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$-modules et calculer son homologie.

2) Soit C un complexe de chaines de R-modules et A un R-module. Montrer que $\mathrm{Hom_R(A, C)}$ est un complexe de chaines. Pour $A = Z_n(C)$ montrer que $H_n(\mathrm{Hom_R(A, C)} = 0 \Rightarrow \mathrm{H_n(C)} = 0$. A-t-on la réciproque?

3) On considère le complexe de groupe abéliens suivants:

$$0 \to C_2 = \oplus_{k=0}^n \mathbb{Z}u_k \overset{d_2}{\to} C_1 = \oplus_{k=0}^n \mathbb{Z}a_k \overset{d_1}{\to} \mathbb{Z} \to 0$$

avec pour $0 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant k \leqslant n$

$$d_1(a_i) = 0, d_2(u_0) = a_0,\ d_2(u_k) = 2a_k - a_{k-1},$$

Calculer l'homologie de ce complexe.

Exercice 2: (caractéristique d'Euler)

Soit $E:\ 0 \longrightarrow E_n \xrightarrow{d_n} E_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} E_{n-2} \longrightarrow \dots \longrightarrow E_0 \longrightarrow 0$ un complexe de chaines de k-espaces vectoriels de dimension finie. Montrer que

$$\sum_{i=0}^n (-1)^i \dim(E_i) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \dim(H_i(E)).$$

Ce nombre est appelé *caractéristique d'Euler* du complexe de chaines E et est noté $\chi(E)$. En déduire que si deux complexes bornés comme ci-dessus sont homotopiquement équivalents alors ils ont la même caractéristique d'Euler. En déduire qu'une suite exacte courte de complexes de chaines bornés de k-espaces vectoriels de dimension finie $0 \to E' \to E \to E'' \to 0$ satisfait la relation

$$\chi(E) = \chi(E') + \chi(E'').$$

Exercice 3: (complexes scindés)

On dit qu'un complexe de chaines $(C_\bullet, d)$ est scindé s'il existe une famille d'applications $s_n : C_n \to C_{n+1}$ telle que $d_{n+1} = d_{n+1}s_n d_{n+1}$.

1) On suppose que le complexe $C_\bullet$ est scindé. Montrer que $C_\bullet$ est exact si et seulement si il est contractile (i.e. l'application identité $C_\bullet \to C_\bullet$ est homotope à l'application nulle).

2) Donner un exemple d'un complexe de chaines exact qui n'est pas contractile.

3) Considérons une suite exacte de R-modules libres $C_\bullet : \cdots \to C_n \to \cdots \to C_0 \to 0$. Montrer que $C_\bullet$ est scindé.

4) Trouver un exemple de suite exacte (non bornée) de R-modules libres qui n'est pas scindée.

Exercice 4: (cône d'une application)

Soit $f : C \to D$ un morphisme de complexes de chaines.
On note $C[1]$ le complexe défini par $C[1]_n = C_{n-1}$, $d = -d^C$.
On pose $\mathrm{Cone(f)_n = C_{n-1} \oplus D_n}$ et $d : \mathrm{Cone(f)_n \to Cone(f)_{n-1}}$ définie par

$$d(x, y) = (-d^C x, d^D y + f(x))$$

1) Montrer que Cone(f) est un complexe et que $0 \to D \to \mathrm{Cone(f)} \to \mathrm{C[1]} \to 0$ est une suite exacte courte de complexes.

2) En déduire que f est un quasi-isomorphisme si et seulement si Cone(f) est exact.

3) Montrer que si f est une équivalence d'homotopie alors Cone(f) est contractile.

4) Montrer que $\mathrm{Cone(id_C)}$ est scindé et exact. On le note Cone(C). On note également $j : C \to \mathrm{Cone(C)}$ l'application canonique.

5) Montrer que f est homotopiquement nulle si et seulement si il existe $s : \mathrm{Cone(C) \to D}$ telle que $f = sj$.

2 Projectifs, injectifs

Exercice 5: (adjonction)

1) On se donne (F, G) une paire de foncteurs adjoints. Montrer que si G envoie les épis sur les épis alors F envoie les projectifs sur les projectifs.

2) Donner un énoncé similaire impliquant des monos et les injectifs.

Exercice 6: (modules projectifs)

1) Montrer que tout facteur direct d'un module projectif est projectif.

2) Montrer que $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est projectif et non libre en tant que $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$-module. Généraliser.

3) Montrer qu'une somme directe de modules projectifs est un module projectif.

4) Montrer que toute suite exacte courte $0 \to A \to B \to C \to 0$ avec C projectif est scindée.

Exercice 7: (modules injectifs)
Soit M un R-module.

1) Montrer que M est injectif si et seulement si pour tout idéal I de R, tout morphisme $I \longrightarrow M$ s'étend en un morphisme $R \longrightarrow M$.

2) En déduire que si de plus R est principal, alors M est injectif si et seulement si M est *divisible* (c'est-à-dire pour tout $a \in R \setminus \{0\}$ la multiplication $M \xrightarrow{\times a} M$ est surjective).

Exercice 8: ((co)limites et projectifs/injectifs)
On se fixe $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ deux catégories et on suppose que les colimites et limites existent dans $\mathcal{D}$. On se donne une famille de foncteurs $F_i : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ pour $i \in I$ où I est un ensemble.

1) Justifier les notations $\prod_{i \in I} F_i$, $\sqcup_{i \in I} F_i$. On suppose maintenant que $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ sont abéliennes.

2) Montrer que si, pour tout $i \in I$ le foncteur F_i est exact à droite il en est de même pour $\prod_{i \in I} F_i$.

3) En déduire que si $(P_i)_{i \in I}$ est une famille de projectifs alors $\sqcup_{i \in I} P_i$ est aussi projectif.

4) Plus généralement, Soit $F : I \to \mathcal{D}$ un foncteur à valeurs dans les projectifs de $\mathcal{D}$. Montrer que $colim_{i \in I} F$ est projectif.

5) Etablir les résultats analogues pour les injectifs.