

Séance de TD n°2

22 septembre 2017

Complexes de chaînes, projectifs et injectifs.

1 Complexes

Exercice 1: (quelques exemples)

1) Pour tout $n \geq 0$ on pose $C_n = \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$, et $C_n = 0$ pour $n < 0$. Soit $d_n : C_n \rightarrow C_{n-1}$ définie par $d_n(x) = 4x$. Montrer que (C, d) est un complexe de chaînes de $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ -modules et calculer son homologie.

2) Soit C un complexe de chaînes de R -modules et A un R -module. Montrer que $\text{Hom}_R(A, C)$ est un complexe de chaînes. Pour $A = Z_n(C)$ montrer que $H_n(\text{Hom}_R(A, C)) = 0 \Rightarrow H_n(C) = 0$. A-t-on la réciproque?

3) On considère le complexe de groupe abéliens suivants:

$$0 \rightarrow C_2 = \bigoplus_{k=0}^n \mathbb{Z}u_k \xrightarrow{d_2} C_1 = \bigoplus_{k=0}^n \mathbb{Z}a_k \xrightarrow{d_1} \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

avec pour $0 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq n$

$$d_1(a_i) = 0, d_2(u_0) = a_0, d_2(u_k) = 2a_k - a_{k-1},$$

Calculer l'homologie de ce complexe.

Exercice 2: (caractéristique d'Euler)

Soit $E : 0 \rightarrow E_n \xrightarrow{d_n} E_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} E_{n-2} \rightarrow \dots \rightarrow E_0 \rightarrow 0$ un complexe de chaînes de k -espaces vectoriels de dimension finie. Montrer que

$$\sum_{i=0}^n (-1)^i \dim(E_i) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \dim(H_i(E)).$$

Ce nombre est appelé *caractéristique d'Euler* du complexe de chaînes E et est noté $\chi(E)$. En déduire que si deux complexes bornés comme ci-dessus sont homotopiquement équivalents alors ils ont la même caractéristique d'Euler. En déduire qu'une suite exacte courte de complexes de chaînes bornés de k -espaces vectoriels de dimension finie $0 \rightarrow E' \rightarrow E \rightarrow E'' \rightarrow 0$ satisfait la relation

$$\chi(E) = \chi(E') + \chi(E'').$$

Exercice 3: (complexes scindés)

On dit qu'un complexe de chaînes (C_\bullet, d) est scindé s'il existe une famille d'applications $s_n : C_n \rightarrow C_{n+1}$ telle que $d_{n+1} = d_{n+1}s_n d_{n+1}$.

1) On suppose que le complexe C_\bullet est scindé. Montrer que C_\bullet est exact si et seulement si il est contractile (i.e. l'application identité $C_\bullet \rightarrow C_\bullet$ est homotope à l'application nulle).

2) Donner un exemple d'un complexe de chaînes exact qui n'est pas contractile.

3) Considérons une suite exacte de R -modules libres $C_\bullet : \dots \rightarrow C_n \rightarrow \dots \rightarrow C_0 \rightarrow 0$. Montrer que C_\bullet est scindé.

4) Trouver un exemple de suite exacte (non bornée) de R -modules libres qui n'est pas scindée.

Exercice 4: (cône d'une application)

Soit $f : C \rightarrow D$ un morphisme de complexes de chaînes.

On note $C[1]$ le complexe défini par $C[1]_n = C_{n-1}$, $d = -d^C$.

On pose $\text{Cone}(f)_n = C_{n-1} \oplus D_n$ et $d : \text{Cone}(f)_n \rightarrow \text{Cone}(f)_{n-1}$ définie par

$$d(x, y) = (-d^C x, d^D y + f(x))$$

1) Montrer que $\text{Cone}(f)$ est un complexe et que $0 \rightarrow D \rightarrow \text{Cone}(f) \rightarrow C[1] \rightarrow 0$ est une suite exacte courte de complexes.

2) En déduire que f est un quasi-isomorphisme si et seulement si $\text{Cone}(f)$ est exact.

3) Montrer que si f est une équivalence d'homotopie alors $\text{Cone}(f)$ est contractile.

4) Montrer que $\text{Cone}(\text{id}_C)$ est scindé et exact. On le note $\text{Cone}(C)$. On note également $j : C \rightarrow \text{Cone}(C)$ l'application canonique.

5) Montrer que f est homotopiquement nulle si et seulement si il existe $s : \text{Cone}(C) \rightarrow D$ telle que $f = sj$.

2 Projectifs, injectifs

Exercice 5: (adjonction)

- 1) On se donne (F, G) une paire de foncteurs adjoints. Montrer que si G envoie les épis sur les épis alors F envoie les projectifs sur les projectifs.
- 2) Donner un énoncé similaire impliquant des monos et les injectifs.

Exercice 6: (modules projectifs)

- 1) Montrer que tout facteur direct d'un module projectif est projectif.
- 2) Montrer que $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est projectif et non libre en tant que $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ -module. Généraliser.
- 3) Montrer qu'une somme directe de modules projectifs est un module projectif.
- 4) Montrer que toute suite exacte courte $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ avec C projectif est scindée.

Exercice 7: (modules injectifs)

Soit M un R -module.

- 1) Montrer que M est injectif si et seulement si pour tout idéal I de R , tout morphisme $I \longrightarrow M$ s'étend en un morphisme $R \longrightarrow M$.
- 2) En déduire que si de plus R est principal, alors M est injectif si et seulement si M est *divisible* (c'est-à-dire pour tout $a \in R \setminus \{0\}$ la multiplication $M \xrightarrow{\times a} M$ est surjective).

Exercice 8: ((co)limites et projectifs/injectifs)

On se fixe \mathcal{C} et \mathcal{D} deux catégories et on suppose que les colimites et limites existent dans \mathcal{D} . On se donne une famille de foncteurs $F_i : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ pour $i \in I$ où I est un ensemble.

- 1) Justifier les notations $\prod_{i \in I} F_i, \sqcup_{i \in I} F_i$. On suppose maintenant que \mathcal{C} et \mathcal{D} sont abéliennes.
- 2) Montrer que si, pour tout $i \in I$ le foncteur F_i est exact à droite il en est de même pour $\prod_{i \in I} F_i$.
- 3) En déduire que si $(P_i)_{i \in I}$ est une famille de projectifs alors $\sqcup_{i \in I} P_i$ est aussi projectif.
- 4) Plus généralement, Soit $F : I \rightarrow \mathcal{D}$ un foncteur à valeurs dans les projectifs de \mathcal{D} . Montrer que $\text{colim}_{i \in I} F$ est projectif.
- 5) Etablir les résultats analogues pour les injectifs.