Algèbre homologique et topologie algébrique
Séance de TD n°2 - exercice 2

Correction proposée par Daniel Zimmer

Exercice 2: caractéristique d'Euler

Soit $E : 0 \to E_n \xrightarrow{d_n} E_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} E_{n-2} \longrightarrow \cdots \longrightarrow E_0 \to 0$ un complexe de chaînes de k-espaces vectoriels de dimension finie. Montrer que

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i \dim(E_i) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i \dim(H_i(E)).$$

Ce nombre est appelé *caractéristique d'Euler* du complexe de chaînes E, noté $\chi(E)$. En déduire que si deux complexes bornés comme ci-dessus sont homotopiquement équivalents alors ils ont la même caractéristique d'Euler. En déduire qu'une suite exacte courte de complexes de chaînes bornés de k-espaces vectoriels de dimension finie $0 \to E' \longrightarrow E \longrightarrow E'' \to 0$ satisfait la relation

$$\chi(E) = \chi(E') + \chi(E'').$$

Solution de l'Exercice 2

Par définition de $H_i(E) = \ker d_i / \operatorname{im} d_{i+1}$, on a la relation

$$\dim(H_i(E)) = \dim(\ker d_i) - \dim(\operatorname{im} d_{i+1}).$$

En particulier, si $i = 0$, $\ker d_0 = E_0$ et

$$\dim(H_0(E)) = \dim(E_0) - \dim(\operatorname{im} d_1),$$

et si $i = n$, $\operatorname{im} d_{i+1} = 0$ et

$$\dim(H_n(E)) = \dim(\ker d_n).$$

On en déduit que

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i \dim(H_i(E)) = \dim(E_0) - \dim(\operatorname{im} d_1) + (-1)^n \dim(\ker d_n) + \sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i(\dim(\ker d_i) - \dim(\operatorname{im} d_{i+1})),$$

c'est-à-dire, puisque $-\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i \dim(\operatorname{im} d_{i+1}) = \sum_{i=2}^{n}(-1)^i \dim(\operatorname{im} d_i)$,

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i \dim(H_i(E)) = \dim(E_0) + \sum_{i=1}^{n}(-1)^i(\dim(\ker d_i) + \dim(\operatorname{im} d_i)).$$

Or, par le théorème du rang, pour $i \geq 1$, $\dim(E_i) = \dim(\ker d_i) + \dim(\operatorname{im} d_i)$, et on déduit finalement que

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \dim(H_i(E)) = \dim E_0 + \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \dim(E_i) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \dim(E_i).$$

Soit maintenant $f : E \longrightarrow D$ une équivalence d'homotopie entre deux complexes bornés de k-espaces vectoriels de dimension finie. En particulier, f est alors un quasi-isomorphisme et on a pour tout n que $H_n(E) \cong H_n(D)$. Donc

$$\chi(E) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \dim(H_i(E)) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \dim(H_i(D)) = \chi(D).$$

Considérons à présent une suite exacte courte de complexes de chaînes bornés de k-espaces vectoriels de dimension finie $0 \to E' \longrightarrow E \longrightarrow E'' \to 0$. Remarquons que toute suite exacte courte de k-espaces vectoriels $0 \to V' \longrightarrow V \longrightarrow V'' \to 0$ est scindée, car tout k-espace vectoriel est projectif lorsque k est un corps (un k-espace vectoriel est un k-module libre), en particulier V'' est projectif et on peut appliquer l'Exercice 6 du TD2. Par l'Exercice 6 du TD1, nous avons donc pour, tout $0 \leq i \leq n$, un isomorphisme $E_i \cong E'_i \oplus E''_i$. Il suit que

$$\chi(E) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \dim(E_i) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i (\dim(E'_i) + \dim(E''_i)) = \chi(E') + \chi(E'').$$

d'où

$$\chi(E) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \dim E_i = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \dim E'_i + \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \dim E''_i = \chi(E') + \chi(E'').$$

Remarque d'Arthur Garnier: Dans la suite exacte courte

$$0 \longrightarrow E'_i \xrightarrow{f_i} E_i \xrightarrow{g_i} E''_i \longrightarrow 0$$

Il n'est pas nécessaire d'utiliser la projectivité de E_i" pour avoir le résultat. En effet, pour tout $i \geq 0$, on a par le théorème du rang,

$$\dim E_i = \dim \ker g_i + \operatorname{rg}(g_i) = \operatorname{rg}(f_i) + \operatorname{rg}(g_i) = \dim E'_i - \dim \ker f_i + \dim E''_i = \dim E'_i + \dim E''_i,$$