TD 2–Exercices 3, 5 et 6

Solution proposé par Arthur Garnier

29 septembre 2017

Exercice 3 :

1. Supposons donc le complexe $(C_\bullet, d)$ scindé. Le fait qu'un complexe contractile soit exact est toujours vrai : si $id : C_\bullet \to C_\bullet$ est homotope à 0, alors $id_{H(C)} = H_\bullet(id_C) : H_\bullet(C) \to H_\bullet(C)$ est égale à zéro, et donc $H_\bullet(C) = 0$. Réciproquement, supposons que $H_n(C) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour $n \geq 0$, on pose
$$s'_n := s_{n|\mathrm{im}\,(d_{n+1})} : \mathrm{im}\, d_{n+1} \to C_{n+1}.$$
Comme $\ker d_n = \mathrm{im}\, d_{n+1}$ (car $C_\bullet$ est exact), on a une suite exacte courte
$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathrm{im}\, d_{n+1} \arrow[r] & C_n \arrow[r] & \mathrm{im}\, d_n \arrow[l, bend right, "s'_{n-1}"'] \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$
qui est scindée car si $x = d_n(y) \in \mathrm{im}\, d_n$, on a $d_n s_{n-1}(x) = d_n s_{n-1} d_n(y) = d_n(y) = x$, donc $d_n(s_{n-1}(x)) = x$, i.e. $d_n \circ s'_{n-1} = id_{\mathrm{im}\, d_n}$ (on a ici confondu d_n et $d^{|\mathrm{im}\, d_n}$). On a donc un isomorphisme,
$$C_n \approx \mathrm{im}\,(d_n) \oplus \mathrm{im}\,(d_{n+1}).$$
et sous cet isomorphisme, la différentielle d_n s'écrit
$$\begin{array}{cccc} d_n & : & C_n & \to & C_{n-1} \\ & & (a,b) & \mapsto & (0,a) \end{array}$$
Posons alors
$$\begin{array}{cccc} h_n & : & C_n & \to & C_{n+1} \\ & & (a,b) & \mapsto & (b,0) \end{array}$$
Alors, h_n est un morphisme de modules, et si $x = (a,b) \in C_n = \mathrm{im}\, d_n \oplus \mathrm{im}\,(d_{n+1})$, alors on a
$$(dh+hd)(x) = (d_{n+1}h_n + h_{n-1}d_n)(a,b) = d_{n+1}(b,0) + h_{n-1}(0,a) = (0,b)+(a,0) = (a,b) = x,$$
d'où $dh + hd = id_C$, ce qui par définition signifie que id_C est homotope à 0, donc que $C_\bullet$ est contractile.
2. Considérons le complexe de groupes abéliens
$$\cdots \longrightarrow \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \longrightarrow \cdots$$

Il ne peut être contractile, car si on avait un homotopie entre id et 0 : $h_n : \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, alors on aurait

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ \mathrm{im}\,(d_{n+1}h_n + h_{n-1}d_n) \subset 2 \cdot \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} = 2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \neq \mathbb{Z}/4\mathbb{Z},$$

et on ne pourrait donc avoir $dh + hd = id$. En revanche, on a

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ \mathrm{im}\,(d_{n+1}) = \{\overline{0}, \overline{2}\} = \ker(d_n) \ \Rightarrow\ H_n(C) = 0.$$

Ce complexe est donc exact sans être contractile (il n'est donc pas non plus scindé d'après 1.).

3. On va construire les $s_n : C_n \to C_{n+1}$ par induction. Supposons tout d'abord que $n = 0$. Comme le complexe est exact, la différentielle $d_1 : C_1 \to C_0$ est surjective, et comme C_0 est libre, il est projectif, donc il existe une flèche $s_0 : C_0 \to C_1$ faisant commuter le diagramme

$$\begin{tikzcd} & C_0 \arrow[dl, dashed, "\exists s_0"'] \arrow[d, "id"] \\ C_1 \arrow[r, two heads, "d_1"'] & C_0 \end{tikzcd}$$

et comme on a alors $d_1 s_0 = id_{C_0}$, ceci entraîne $d_1 s_0 d_1 = d_1$. Soit ensuite $n \geq 0$ et supposons les s_k construits pour $0 \leq k \leq n$. Il nous faut construire s_{n+1}. Remarquons que l'on a

$$(s_n d_{n+1})^2 = s_n d_{n+1} s_n d_{n+1} = s_n d_{n+1},$$

i.e. $s_n d_{n+1} =: \varphi$ est idempotent : c'est un projecteur, ce qui implique que

$$C_{n+1} = \ker \varphi \oplus \mathrm{im}\,\varphi = \ker(s_n d_{n+1}) \oplus \mathrm{im}\,(s_n d_{n+1}).$$

Par ailleurs, la relation $d_{n+1} s_n d_{n+1} = d_{n+1}$ implique $\ker s_n d_{n+1} = \ker d_{n+1} = \mathrm{im}\, d_{n+2}$ par exactitude du complexe. Ainsi, $\mathrm{im}\, d_{n+2}$ est un facteur direct de C_{n+1}, qui est un module libre, de sorte que $\mathrm{im}\, d_{n+2}$ est un module projectif. En restreignant, on a un épimorphisme $d_{n+2} : C_{n+2} \to \mathrm{im}\, d_{n+2}$ et, par projectivité de $\mathrm{im}\, d_{n+2}$, il existe $\widetilde{s_{n+1}}$: $\mathrm{im}\, d_{n+2} \to C_{n+2}$ rendant commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{im}\, d_{n+2} \arrow[dl, dashed, "\exists \widetilde{s_{n+1}}"'] \arrow[d, "id"] \\ C_{n+2} \arrow[r, two heads, "d_{n+2}"'] & \mathrm{im}\, d_{n+2} \end{tikzcd}$$

De plus, comme on a $C_{n+1} = \mathrm{im}\,(d_{n+2}) \oplus \mathrm{im}\,(s_n d_{n+1})$, on peut composer avec la projection canonique $C_{n+1} \to \mathrm{im}\,(d_{n+2})$ pour obtenir

$$s_{n+1} : C_{n+1} \twoheadrightarrow \mathrm{im}\, d_{n+2} \xrightarrow{\widetilde{s_{n+1}}} C_{n+2}\ .$$

Dans ce cas, si $x \in C_{n+2}$, on a

$$d_{n+2} s_{n+1} d_{n+2}(x) = d_{n+2} \widetilde{s_{n+1}} d_{n+2}(x) = d_{n+2}(x) \ \Rightarrow\ d_{n+2} s_{n+1} d_{n+2} = d_{n+2}.$$

On a donc trouvé par récurrence des $s_n : C_n \to C_{n+1}$ tels que $d_{n+1} s_n d_{n+1} = d_{n+1}$, donc le complexe C est bien scindé.

4. On peut reprendre l'exemple de 2. donné par

$$\cdots \longrightarrow \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \longrightarrow \cdots$$

   Nous avons vu que c'est un complexe exact non contractile, donc qui n'est pas scindé. Or il est formé de $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$-modules libres, donc répond à la question (remarquons qu'il n'est pas borné).

Exercice 5 :

1. Considérons $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D} : G$ deux foncteurs entre catégories, tels que (F, G) soit une paire adjointe. Prenons P un objet projectif dans $\mathcal{C}$ et montrons que le foncteur $\mathrm{Mor}_{\mathcal{D}}(F(P), -)$ est exact (ce qui montrera que $F(P)$ est aussi projectif dans $\mathcal{D}$. Soit donc un épimorphisme $\varphi : M \to N$ entre objets de $\mathcal{D}$. En considérant les applications $\varphi_* : \mathrm{Mor}_{\mathcal{D}}(F(P), M) \to \mathrm{Mor}_{\mathcal{D}}(F(P), N)$ et $G\varphi_* = (G\varphi)_* : \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(P, G(M)) \to \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(P, G(N))$ définies respectivement par $f \mapsto \varphi \circ f$ et $g \mapsto G(\varphi) \circ g$, on a, par naturalité des bijections provenant de l'adjonction, un carré commutatif (dans lequel les bijections verticales sont celles de l'adjonction) :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Mor}_{\mathcal{D}}(F(P), M) \arrow[r, "\varphi_*"] \arrow[d, "\approx"'] & \mathrm{Mor}_{\mathcal{D}}(F(P), N) \arrow[d, "\approx"] \\
\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(P, G(M)) \arrow[r, "G\varphi_*"'] & \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(P, G(N))
\end{tikzcd}$$

   Or, G préserve les épimorphismes, donc $G(\varphi) : G(M) \to G(N)$ est un épimorphisme et puisque P est projectif, l'application $G\varphi_*$ est surjective et par le carré ci-dessus, on en tire que φ_* est surjective. Ainsi, comme le foncteur $\mathrm{Mor}_{\mathcal{D}}(F(P), -)$ est de plus exact à gauche, il est exact et donc $F(P)$ est projectif, ce que l'on voulait.

2. L'énoncé dual, qui se démontre de la même manière, est le suivant :
   Si F préserve les monomorphismes, alors G préserve les objets injectifs.

Exercice 6 :

1. Soit P un module projectif. Il existe un module libre F dont P est facteur direct, i.e. il existe un sous-module Q de F tel que $F = P \oplus Q$. Supposons maintenant que M soit facteur direct de P, de sorte que l'on puisse écrire $P = M \oplus N$ avec N un sous-module de P. Alors, on a
$$F = P \oplus Q = M \oplus (N \oplus Q),$$
   donc M est facteur direct de F, ce qui fait de M un module projectif.

2. On a que $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est facteur direct de $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, car par le théorème des restes chinois, comme $\mathrm{pgcd}(2, 3) = 1$, on a

$$\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}.$$

Or ${}^{\mathbb{Z}}/_{2\mathbb{Z}}$ n'est pas un module libre sur ${}^{\mathbb{Z}}/_{6\mathbb{Z}}$, car un ${}^{\mathbb{Z}}/_{6\mathbb{Z}}$-module libre contient au-moins six éléments.

On peut généraliser, avec le même raisonnement, et obtenir que si $m, n \in \mathbb{N}^*$ sont premiers entre eux, alors ${}^{\mathbb{Z}}/_{n\mathbb{Z}}$ est un ${}^{\mathbb{Z}}/_{nm\mathbb{Z}}$-module projectif non libre.

3. Soit $(P_i)_{i\in I}$ une famille de modules projectifs. Pour tout $i \in I$, il existe un module libre F_i est un sous-module Q_i de F_i tels que $P_i \oplus Q_i \simeq F_i$. Alors, comme les F_i sont tous libres, il en est de même du module $\bigoplus_{i\in I} F_i$ et on a

$$\left(\bigoplus_{i\in I} P_i\right) \oplus \left(\bigoplus_{i\in I} Q_i\right) \simeq \bigoplus_{i\in I} F_i,$$

donc $\bigoplus_i P_i$ est aussi facteur direct d'un module libre, donc est projectif.

4. Soit C un module projectif, s'insérant dans une suite exacte courte de modules

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0\ .$$

Comme $g : B \to C$ est surjectif, c'est un épimorphisme et la projectivité de C assure l'existence de $s : C \to B$ rendant commutatif le triangle

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[dl, dashed, "\exists s"'] \arrow[d, "id_C"] \\ B \arrow[r, two heads, "g"'] & C \end{tikzcd}$$

et on a donc $g \circ s = id_C$. s est ainsi une section de g, donc la suite exacte courte ci-dessus est scindée.

En fait, la réciproque est vraie : si C est un module tel que toute suite exacte courte

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

est scindée, alors C est projectif. En effet, soit $F_C := \bigoplus_{c\in C} R$ le module libre sur $U(C)$ (l'ensemble sous-jacent à C) et soit $\varphi_C : F_C \twoheadrightarrow C$ le morphisme canonique. Si on note $K := \ker \varphi_C$, on a une suite exacte courte

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow F_C \xrightarrow{\varphi_C} C \longrightarrow 0\ ,$$

qui est scindée par hypothèse, donc on a

$$F_C \simeq K \oplus C$$

et C est alors projectif, comme facteur direct du module libre F_C.