

Exh (Cône d'une application.)
 $f: C \rightarrow D$ morphisme de complexes de chaînes de R -modules

$\rightarrow C[1]$ complexe "décalé": $C[1]_n = C_{n-1}$, $d^{C[1]} = -d^C$
 car un décalage des R -modules.

$\rightarrow \text{Cone}(f)_n = C_{n-1} \oplus D_n$, $d: \text{Cone}(f)_n \rightarrow \text{Cone}(f)_{n-1}$
 $(x, y) \mapsto (-d^C x, d^D y + f(x))$

1) $\text{Cone}(f)$ complexe

On arrive bien de les bons ensembles et d est bien un morphisme

Ecriture matricielle $\begin{pmatrix} -d^C & 0 \\ f & d^D \end{pmatrix} = \Delta$

Autre écriture:

$$d = -i_C d^C \pi_C + i_D d^D \pi_D + i_D f \pi_C$$

On a $\Delta^2 = \begin{pmatrix} (d^C)^2 & 0 \\ -f d^C + d^D f & (d^D)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

0 car carré complexe
0 car f morphisme de complexes
0 car d^D complexe

* $0 \rightarrow D \xrightarrow{i_D} \text{Cone}(f) \xrightarrow{\pi_C} C[1] \rightarrow 0$ suite exacte car c'est de complexes

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & D_n & \xrightarrow{i_D} & C_{n-1} \oplus D_n & \xrightarrow{\pi_C} & C_{n-1} \rightarrow 0 \\ & & \downarrow d^D & & \downarrow d & & \downarrow d^{C[1]} = -d^C \\ 0 & \rightarrow & D_{n-1} & \xrightarrow{i_D} & C_{n-2} \oplus D_{n-1} & \xrightarrow{\pi_C} & C_{n-2} \rightarrow 0 \end{array}$$

i_D morphisme de complexes:

π_C morphisme de complexes.

$$\begin{pmatrix} -d^C & 0 \\ f & d^D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ i_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ d^D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ i_D \end{pmatrix} (d^D)$$

$$\pi_C \circ d = -d^C \pi_C$$

avec i écriture avec des morphismes

ou bien: $d \circ i_D = (-i_C d^C \pi_C + i_D d^D \pi_D + i_D f \pi_C) i_D = i_D d^D$

$\rightarrow \pi_C \circ i_D = 0$ ($\forall n$) \rightarrow exactitude ($\forall n$)
 OK. ou (pr def. de \oplus)

2) f quasi-isomorphisme $\Leftrightarrow \text{Cone}(f)$ exact.

def $H(f) = H(C) \xrightarrow{\sim} H(D)$

On a la suite exacte longue associée à la p.d.e.c. $0 \rightarrow D \rightarrow \text{Cone}(f) \rightarrow C[1] \rightarrow 0$

$$\dots \rightarrow H_n(D) \xrightarrow{i_{D,n}} H_n(\text{Cone}(f)) \xrightarrow{j_{C,n}} H_n(C[1]) \xrightarrow{\delta_n} H_{n-1}(D) \xrightarrow{i_{D,n-1}} H_{n-1}(\text{Cone}(f)) \rightarrow \dots$$

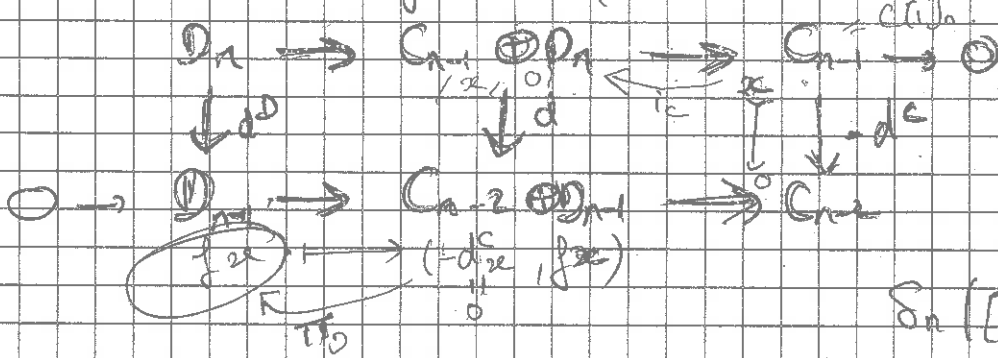
$\begin{matrix} \cong \\ H_{n-1}(C) \end{matrix}$

Donc on a: $\forall n, H_n(\text{Cone}(f)) = 0 \Leftrightarrow \forall n, \delta_n = 0$.

Reste à voir que $\delta_n = H_n(f)$

↳ cf cours : comment obtient-on le bord de la suite exacte longue

Cherche un diagramme " (+ lemme du serpent)



$$\delta_n([z]) = [f(z)]$$

$$\begin{matrix} H_{n-1}(D) \\ \cong \\ H_{n-1}(C) \end{matrix} \xrightarrow{\delta_n} H_{n-1}(D)$$

3) f équivalence d'homotopie $\Rightarrow \text{Cone}(f)$ contractible $\xrightarrow{d^c} \text{id} \approx 0$
 \downarrow \downarrow \downarrow
 f quasi-iso $\Leftrightarrow \text{ccone}(f)$ exact \downarrow exact + simple (exo 3)

$C \xrightarrow{f} D$
 $\downarrow g$
 $g \circ f \approx \text{id}_C$ Set α tq $\alpha d^c + d^c \alpha = (\text{id}_C) - g f$
 $f \circ g = \text{id}_D$ β $\beta d^0 + d^0 \beta = (\text{id}_D) - f g$

On veut

$C_{n-1} \oplus D_n \xrightarrow{d} C_{n-2} \oplus D_{n-1}$
 $\downarrow \alpha$ $\downarrow \beta$
 $C_{n-1} \xrightarrow{d^c} C_{n-2}$
 \downarrow \downarrow
 $C_n \xrightarrow{d^c} C_{n-1}$
 on a déjà g

$C_{n+1} \rightarrow C_n \xrightarrow{d^c} C_{n-1}$
 $\downarrow \alpha_n$ $\downarrow \alpha_{n-1}$
 $C_{n+1} \rightarrow C_n \xrightarrow{d^c} C_{n-1}$

avec $sd + ds = \text{id}_{\text{Cone}(f)}$ (d homotopie entre $\text{id}_{\text{Cone}(f)}$ et 0)
 (on a les simplifications $d \circ d = d \rightarrow$ sa race (car déjà exact))

Poseons $s = \begin{pmatrix} \alpha & g \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ (i.e. $s(x, y) = (-\alpha(x) + g(y), \beta(y))$)
 $\Delta = -k \alpha \pi_C + k g \pi_D + (\beta \pi_D)$

$s d = \begin{pmatrix} -d^c & 0 \\ f & d^0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & g \\ 0 & \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +\alpha d^c + g f & g d^0 \\ \beta f & \beta d^0 \end{pmatrix}$
 $ds = \begin{pmatrix} -d^c & 0 \\ f & d^0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & g \\ 0 & \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +d^c \alpha - d^c g & \\ -f \alpha & f g + d^0 \beta \end{pmatrix}$

d'au $sd + ds = \begin{pmatrix} \text{id}_C & 0 \\ \beta f - f \alpha & \text{id}_D \end{pmatrix}$

Maîtrise

$sd + ds$ morphisme de complexe $\text{Cone}(f) \rightarrow \text{Cone}(f)$

$(sd + ds)d = dsd = d(sd + ds)$

et c'est m m iso ! (inverse $\begin{pmatrix} \text{id}_C & 0 \\ -\beta f + f \alpha & \text{id}_D \end{pmatrix}$)

Donc s réalise une homotopie

entre 0 et un iso $\psi : \text{Cone}(f) \xrightarrow{\sim} \text{Cone}(f)$

$\psi \xrightarrow{\text{homotopie}} 0$
 (s, \dots, \dots)

Lemme : Si $f \approx g$
 alors $\forall h$ $h \circ f \approx h \circ g$

4) $\boxed{\text{Cone}(id_C) \text{ scindé et exact}} \quad id_C : C \rightarrow C$

\hookrightarrow notations $\text{Cone}(C)$ (c'est un complexe) $C_n \oplus C_n$

id_C est une équivalence d'homotopie,
donc d'après q.3), $\text{code}(id_C)$ est contractile

$$d : (x, y) \mapsto (-dx, x + dy)$$

$$\begin{pmatrix} -d^C & 0 \\ 1 & d^C \end{pmatrix}$$

Lemme : $\boxed{\text{Contractile} \implies \text{scindé et exact}} \quad \left| \begin{array}{l} \text{(déjà fait} \\ \text{ds exo 3)} \end{array} \right.$

Def C scindé : $\exists d_n : C_n \rightarrow C_{n-1} \quad d_{n+1} = d_{n+1} \circ d_n$
(après le C de l'exo)

Contractile : $C_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} C_n \xrightarrow{d_n} C_{n-1}$

$$\begin{array}{ccccc} & & C_{n+1} & \xrightarrow{d_{n+1}} & C_n & \xrightarrow{d_n} & C_{n-1} \\ & \swarrow d_n & & & \downarrow id & & \swarrow d_{n-1} \\ C_{n+1} & \xrightarrow{d_{n+1}} & C_n & \xrightarrow{d_n} & C_{n-1} & & \end{array}$$

$$id = d_{n+1} \circ d_n + d_n \circ d_{n-1}$$

Cela a donc $d_{n+1} = d_{n+1} \circ d_n \circ d_{n+1} \implies \text{scindé}$

le $+ id_C \simeq 0_C$ d'où th $H_n(\text{Cone}) = H_n(0_C) = 0$

$H_n^1(C) \implies \text{exact}$

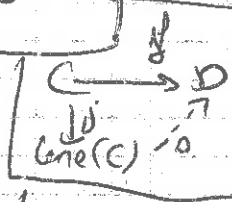
Notation

$j : C \rightarrow \text{Cone}(C)$ application canonique

$$\begin{array}{ccc} C_n & \xrightarrow{j} & C_{n-1} \oplus C_n \\ \downarrow d^C & & \downarrow d \\ C_{n-1} & \xrightarrow{j} & C_{n-2} \oplus C_{n-1} \end{array}$$

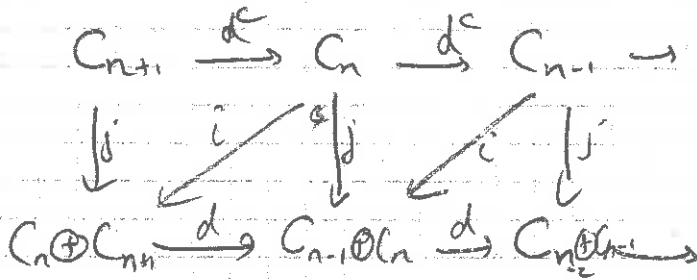
(morphisme de complexes
cas particulier du cas
général vu en q.1)

5) $f = 0 \iff \exists \rho, \text{Core}(C) \rightarrow D, f = \rho_j$
 $f: C \rightarrow D$ (f s'écrit au Core)



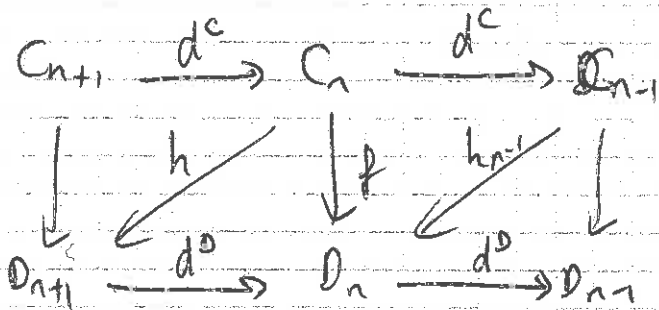
\Leftarrow Il suffit de vérifier que $C \xrightarrow{d} \text{Core}(C), j \approx 0$

(En effet : $f \approx g \Rightarrow \forall u, v, ufv \approx ugv$) (faute en revoyant à la diff.)



$d \circ i(c) \approx i \circ d^c(c) = (-d^c(c), id(c)) + (d^c(c), 0) = (0, c) = j(c)$ OK.

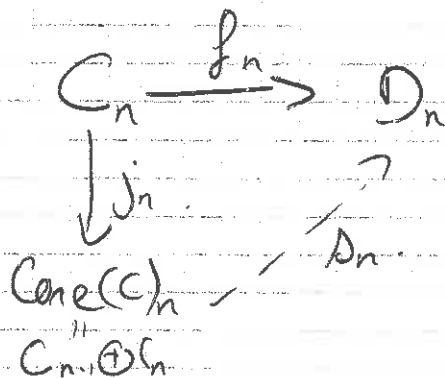
\Rightarrow



On a une homotopie

$f = d^D h + h d^c$

On cherche



Posons

$S_n(x, y) = h_{n-1}(z) + f(y)$

Vérification : $S_n \circ j_n(c) = S_n(0, c) = f(c)$

d'où $\rho \circ j = f$

On vérifie : $d_n^D \circ S_n(x, y) = d_n^D(h(z) + f(y)) = d^D h(z) + d^D f(y)$

$S d(x, y) = S(-d^c x, d^c y + x) = -h d^c(z) + f d^c y + f x$

d'où $d^D S = S d$ (en utilisant $f = d^D h + h d^c$)