Ex 4 (Cône d'une application)

$f : C \to D$ morphisme de complexes de chaînes de R-modules.

→ $C[1]$ complexe "décalé" : $C[1]_n = C_{n-1}$, $d^{C[1]} = -d^C$

à un sens ds les R-Modules.

Rem : c'est bien un complexe.

→ $\mathrm{Cone}(f)_n = C_{n-1} \oplus D_n$, $d : \mathrm{Cone}(f)_n \to \mathrm{Cone}(f)_{n-1}$

$(x, y) \longmapsto (-d^C x, d^D y + f(x))$

1) • Cone(f) complexe

On arrive bien ds les bons ensembles et d est bien un morphisme.

Ecriture matricielle $\begin{pmatrix} -d^C & 0 \\ f & d^D \end{pmatrix} = \Delta$

Autre écriture :

$d = -i_C d^C \pi_C + i_D d^D \pi_D + i_D f \pi_C$

$C_{n-1} \underset{\pi_C}{\overset{i_C}{\rightleftarrows}} C_n \oplus D_n \underset{i_D}{\overset{\pi_D}{\rightleftarrows}} D_n$

On a $\Delta^2 = \begin{pmatrix} \overbrace{(d^C)^2}^{0 \text{ car } C \text{ complexe}} & 0 \\ \underbrace{-f d^C + d^D f}_{0 \text{ car } f \text{ morphisme de complexes}} & \underbrace{(d^D)^2}_{0 \text{ car } D \text{ complexe}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ d'où $d^2 = 0$

* $\boxed{0 \to D \xrightarrow{i_D} \mathrm{Cone}(f) \xrightarrow{\pi_C} C[1] \to 0}$ suite exacte courte de complexes

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & D_n & \xrightarrow{i_D} & C_{n-1} \oplus D_n & \xrightarrow{\pi_C} & C_{n-1} & \to & 0 \\
 & & \downarrow d^D & & \downarrow d & & \downarrow d^{C[1]} = -d^C & & \\
0 & \to & D_{n-1} & \xrightarrow{i_D} & C_{n-2} \oplus D_{n-1} & \xrightarrow{\pi_C} & C_{n-2} & \to & 0
\end{array}$$

→ i_D morphisme de complexes :

$\underbrace{\begin{pmatrix} -d^C & 0 \\ f & d^D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1_D \end{pmatrix}}_{d \circ i_D} = \begin{pmatrix} 0 \\ d^D \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1_D \end{pmatrix} (d^D)}_{i_D \circ d^D}$

ou bien : $d \circ i_D = (-i_C d^C \pi_C + i_D d^D \pi_D + i_D f \pi_C) \circ i_D = i_D d^D$

→ π_C morphisme de complexes.

$\pi_C \circ d = -d^C \pi_C$

avec l'écriture avec des morphismes

→ $\pi_C \circ i_D = 0$ $(\forall n)$ → exactitude $(\forall n)$

OK. OK (par déf. de $\oplus$)

2) $\boxed{f \text{ quasi-isomorphisme} \iff \mathrm{Cone}(f) \text{ exact !}}$

$\underset{\text{déf}}{\iff} H(f) : H(C) \underset{\text{iso}}{\xrightarrow{\sim}} H(D)$

On a la suite exacte longue associée à la s.e.c. $0 \to D \to \mathrm{Cone}(f) \to C[1] \to 0$:

$$\cdots \to H_n(D) \xrightarrow{i_{D*}} H_n(\mathrm{Cone}(f)) \xrightarrow{\pi_{C*}} \underbrace{H_n(C[1])}_{\cong\, H_{n-1}(C)} \xrightarrow{\delta_n} H_{n-1}(D) \xrightarrow{i_{D*}} H_{n-1}(\mathrm{Cone}(f)) \to \cdots$$

Donc on a : $\forall n \; H_n(\mathrm{Cone}(f)) = 0 \iff \forall n \; \delta_n$ iso.

Reste à voir que $\delta_n = H_{n-1}(f)$

↳ cf cours : comment obtient-on le bord de la suite exacte longue

"Chasse au diagramme" (+ lemme du serpent).

$$\begin{tikzcd}
 & D_n \arrow[r] \arrow[d, "d^D"] & C_{n-1} \oplus D_n \arrow[r] \arrow[d, "d"] & C_{n-1} = C[1]_n \arrow[r] \arrow[d, "-d^C"] & 0 \\
0 \arrow[r] & D_{n-1} \arrow[r] & C_{n-2} \oplus D_{n-1} \arrow[r] & C_{n-2} &
\end{tikzcd}$$

$(x, 0) \overset{\pi_C}{\longmapsto} x$, $\quad -d^C x = 0$

$(x,0) \overset{d}{\longmapsto} (\underbrace{-d^C_x}_{=0}, f x)$, $\quad f x \xleftarrow{\pi_D} (-d^C_x, f x)$

$$\delta_n([x]) = [f(x)]$$

$$\frac{Z_{n-1}(C)}{B_{n-1}(C)} = H_{n-1}(C) \xrightarrow{\delta_n} H_{n-1}(D)$$

3) $\boxed{f \text{ équivalence d'homotopie} \Longrightarrow \text{Cone}(f) \text{ contractile}} \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} id_{\text{Cone}(f)} \simeq 0$

$\Downarrow$ f quasi-iso $\Leftrightarrow$ cone(f) exact $\quad\quad$ exact + scindé (exo 3).

$C \underset{g}{\overset{f}{\rightleftarrows}} D.$ $\quad g\circ f \simeq id_C$ $\quad$ Soit α tq $\boxed{\alpha d^C + d^C\alpha = (id_C) - gf}$

$f\circ g \simeq id_D$ $\quad\quad \beta \quad \boxed{\beta d^D + d^D\beta = (id_D) - fg}$

$$\begin{tikzcd}
C_{n+1} \arrow[r] \arrow[d] & C_n \arrow[r, "d_n^C"] \arrow[d] \arrow[dl, "\alpha_n"'] & C_{n-1} \arrow[d] \arrow[dl, "\alpha_{n-1}"'] \\
C_{n+1} \arrow[r] & C_n \arrow[r, "d_n^C"'] & C_{n-1}
\end{tikzcd}$$

On veut

$$\begin{tikzcd}
C_{n-1} \oplus D_n \arrow[r, "d"] & C_{n-2} \oplus D_{n-1} \arrow[l, bend left, "s"]
\end{tikzcd}$$

α, β, g : on a déjà

avec $sd + ds = id_{\text{Cone}(f)}$ $\quad$ (s homotopie entre $id_{\text{Cone}(f)}$ et 0)

(On aura simplement $dsd = d \to$ scindé (car déjà exact).

Posons $s = \begin{pmatrix} -\alpha & g \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ $\quad$ (i.e. $s(x,y) = (-\alpha(x) + g(y), \beta(y))$).

$\boxed{s = -i_C\,\alpha\,\pi_C + i_C\, g\, \pi_D + i_D\,\beta\,\pi_D}$

$$sd = \begin{pmatrix} -\alpha & g \\ 0 & \beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -d^C & 0 \\ f & d^D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +\alpha d^C + gf & g d^D \\ \beta f & \beta d^D \end{pmatrix}$$

$$ds = \begin{pmatrix} -d^C & 0 \\ f & d^D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\alpha & g \\ 0 & \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +d^C\alpha & -d^C g \\ -f\alpha & fg + d^D\beta \end{pmatrix}$$

d'où $\boxed{sd + ds = \begin{pmatrix} id_C & 0 \\ \beta f - f\alpha & id_D \end{pmatrix}}$

Maintenant

$sd + ds$ morphisme de complexe $\text{Cone}(f) \longrightarrow \text{Cone}(f)$

$((sd+ds)d = dsd = d(sd+ds))$

et c'est m̂ un iso ! $\quad$ (inverse. $\begin{pmatrix} id_C & 0 \\ -\beta f + f\alpha & id_D \end{pmatrix}$

Donc s réalise une homotopie

entre 0 et un iso $\varphi : \text{Cone}(f) \to \text{Cone}(f)$

$\varphi \overset{\text{homotopie}}{\simeq} 0$. or ...

$\boxed{\underline{\text{Lemme}} : \text{Si } f \underset{\text{homotopie}}{\simeq} g \text{ alors } \forall h \quad h\circ f \simeq h\circ g}$

$(\ldots \simeq 0)$

4) $\boxed{\text{Cone}(id_C) \text{ scindé et exact}}$ $\qquad id_C : C \longrightarrow C$

↳ notation $\text{Cone}(C)$ (C'est un complexe). $C_{n-1} \oplus C_n$

$d : (x,y) \mapsto (-d^C x, x + d^C y)$

id_C est une équivalence d'homotopie,

donc d'après q.3), $\text{Cone}(id_C)$ est contractile. $\begin{pmatrix} -d^C & 0 \\ 1_C & d^C \end{pmatrix}$

Lemme $\boxed{\text{Contractile} \Longrightarrow \text{scindé et exact}}$ (déjà fait dans exo 3)

[Déf C scindé : $\exists\, s_n : C_n \to C_{n+1}$ $\quad d_{n+1} = d_{n+1} s_n d_{n+1}$

(pas le C de l'exo)

Contractile : $\exists s_n$

$$\begin{tikzcd} C_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}"] & C_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[dl, "s_n"'] \arrow[d, "id"] & C_{n-1} \arrow[dl, "s_{n-1}"] \\ C_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}"'] & C_n \arrow[r, "d_n"'] & {} \end{tikzcd}$$

$id = d_{n+1} s_n + s_{n-1} d_n$.

On a donc $d_{n+1} = d_{n+1} s_n d_{n+1}$ $\longrightarrow$ scindé.

De + $\underset{\text{homotopie}}{id_C \simeq 0_C}$. d'où $\forall n$ $H_n(id_C) = H_n(0_C) = 0$.

$\overset{\shortparallel}{Id_{H_n(C)}}$ $\rightarrow$ exact.]

Notation

$j : C \longrightarrow \text{Cone}(C)$ application canonique

$$\begin{tikzcd} C_n \arrow[r, "j"] \arrow[d, "d^C"] & C_{n-1} \oplus C_n \arrow[d, "d"] \\ C_{n-1} \arrow[r, "j"] & C_{n-2} \oplus C_{n-1} \end{tikzcd}$$

(morphisme de complexe cas particulier du cas général vu en q 1).

5) $\boxed{f \simeq 0 \iff \exists s,\ \mathrm{Cone}(C) \to D,\ f = sj}$

~~(f s'étend au Cône)~~

$f : C \to D$

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "f"] \arrow[d, "j"'] & D \\ \mathrm{Cone}(C) \arrow[ur, dashed, "s"'] & \end{tikzcd}$$

($\Leftarrow$) Il suffit de vérifier que $C \xrightarrow{j} \mathrm{Cone}(C)$, $j \simeq 0$

(En effet : $f \simeq g$ (équiv d'homotopie) $\Rightarrow \forall u, v,\ ufv \simeq ugv$) (facile en revenant à la déf.)

$$\begin{tikzcd} C_{n+1} \arrow[r, "d^c"] \arrow[d, "j"] & C_n \arrow[r, "d^c"] \arrow[d, "j"] \arrow[dl, "i"'] & C_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "j"] \arrow[dl, "i"'] & {} \\ C_n \oplus C_{n+1} \arrow[r, "d"] & C_{n-1} \oplus C_n \arrow[r, "d"] & C_{n-2} \oplus C_{n-1} \arrow[r] & {} \end{tikzcd}$$

$d \circ i(c) + i \circ d^c(c) = (-d^c(c), id(c)) + (d^c(c), 0)$ OK.

$= (0, c) = j(c)$

($\Rightarrow$)

On a une homotopie

$$\begin{tikzcd} C_{n+1} \arrow[r, "d^c"] \arrow[d] & C_n \arrow[r, "d^c"] \arrow[d, "f"] \arrow[dl, "h"'] & C_{n-1} \arrow[d] \arrow[dl, "h_{n-1}"'] \\ D_{n+1} \arrow[r, "d^D"] & D_n \arrow[r, "d^D"] & D_{n-1} \end{tikzcd}$$

$\boxed{f = d^D h + h d^C}$

On cherche

$$\begin{tikzcd} C_n \arrow[r, "f_n"] \arrow[d, "j_n"] & D_n \\ \mathrm{Cone}(C)_n \arrow[ur, dashed, "s_n"'] & \end{tikzcd}$$

$\mathrm{Cone}(C)_n = C_{n-1} \oplus C_n$

Posons

$s_n(x, y) = h_{n-1}(x) + f(y)$

Vérification $*$ $s_n \circ j_n(c) = s_n(0, c) = f(c)$ d'où $\boxed{s \circ j = f}$

s morphisme de complexes $*$ $d^D_n \circ s_n(x, y) = d^D_n(h(x) + f(y)) = d^D h(x) + d^D f(y)$

$s\, d(x, y) = s(-d^c x, d^c y + x) = -h d^c(x) + f d^c y + f x$

d'où $d^D s = s d$ (en utilisant $\underline{f = d^D h + h d^C}$)