Correction de l'exercice 6 du TD 2, par Julien Trevisan

Question 1

On se donne M un R-module (à gauche) projectif et M_1 un facteur direct de M et M_2 tel que M soit la somme directe de M_1 avec M_2, où R est un anneau. On se donne N, O des R-modules, h un morphisme surjectif (c'est-à-dire un épimorphisme si on se place dans la catégorie des R-modules à gauche) de O dans N et f un morphisme de M_1 dans N.
On sait alors qu'il existe un morphisme ϕ de M dans O tel que $h \circ \phi = f \circ p_1$ où p_1 est la projection canonique de M sur M_1, car M est projectif. On appelle i_1 l'injection canonique de M_1 dans M. Alors, on a : $f = f \circ p_1 \circ i_1 = h \circ \phi \circ i_1$. D'où le résultat voulu.

Question 2

Montrons tout d'abord $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ n'est pas un $Z/6\mathbb{Z}$-module libre. Si c'était le cas alors le cardinal du premier serait infini ou un multiple de 6. Ce qui est exclu car son cardinal vaut 2.
Montrons ensuite que c'est un $Z/6\mathbb{Z}$-module projectif. On se donne O, N des $Z/6\mathbb{Z}$-modules. On se donne h un épimorphisme de O vers N. On se donne f un morphisme de $Z/2\mathbb{Z}$ vers N. On se donne a un antécédent de f_1 par h. On appelle $\phi : \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow O$ l'application qui à la classe de 0 associe 0 et à la classe de 1 associe $3a$. Alors, ϕ est un morphisme. En effet : $\phi(1+1) = 0$ et $\phi(1) + \phi(1) = 6a = 0$ (6 est nul dans $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$. De plus : $(h \circ \phi)(1) = h(3.a) = 3.h(a) = 3.f(1) = f(3) = f(1)$ car $3 - 2 = 1$ et donc $h \circ \phi = f$. D'où le résultat voulu.
On peut généraliser cette preuve à $Z/p\mathbb{Z}$ vu comme $Z/pq\mathbb{Z}$-module, où p, q sont des nombres premiers distincts.

Question 3

On se donne une famille $(M_i)_{i\in I}$ une famille de R-modules projectifs. On se donne O, N deux R-modules. On se donne f un morphisme de $\bigoplus_{i\in I} M_i =: M$ dans N et h un épimorphisme de O vers N. On appelle, pour tout $i \in I$, p_i la projection canonique de M vers M_i et inj_i l'injection canonique de M_i vers M.
Alors pour tout $i \in I$, il existe ϕ_i tel que $h \circ \phi_i = f \circ inj_i$. On utilise l'axiome du choix pour former une famille $(\phi_i)_{i\in I}$. On appelle ensuite $\bigoplus_{i\in I} \phi_i$ le morphisme de M dans O défini par : pour tout $m \in M$, $(\bigoplus_{i\in I} \phi_i)(m) = \sum_{i\in I}(\phi_i \circ inj_i \circ p_i)(m)$. On vérifie alors que : $h \circ \bigoplus_{i\in I} \phi_i = f$. D'où le résultat voulu.

Question 4

On se donne une suite exacte comme dans l'énoncé et on appelle p le morphisme dans cette suite qui va de B dans C, qui est donc un épimorphisme. On prend alors, avec les notations des questions précédentes : $O = B$, $N = C$, $h = p$ et $f = 1_C$. On a alors s un morphisme de B dans C tel que : $1_C = p \circ s$. D'où le résultat voulu d'après le TD 1.