

## Séance de TD n°3

30 septembre 2016

### Produit tensoriel.

#### Exercice 1:

- 1) Qu'est-ce qu'une application quasi-bilinéaire pour des  $\mathbb{Z}$ -modules?
- 2) Montrer que  $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  est isomorphe à  $\mathbb{Z}/\text{pgcd}(n, m)\mathbb{Z}$ . Que se passe-t-il si  $m$  et  $n$  sont premiers entre eux?
- 3) Plus généralement, soient  $R$  un anneau,  $I$  un idéal à droite,  $N$  un  $R$ -module à gauche. Montrer qu'il existe un isomorphisme naturel de groupes abéliens

$$R/I \otimes_R N \xrightarrow{\sim} N/IN$$

où  $IN = \{i \cdot n, i \in I, n \in N\}$ . En déduire un isomorphisme naturel de groupes abéliens

$$R/I \otimes_R R/J \xrightarrow{\sim} R/(I + J)$$

où  $J$  est un idéal à gauche.

- 4) Soit  $R$  un anneau et  $M$  et  $N$  deux  $R$ -modules à gauche. On suppose que  $M$  est divisible et que  $N$  est de torsion ( $\forall y \in N, \exists b \in R \setminus \{0\}, by = 0$ ). Montrer que  $M \otimes_R N = 0$ .
- 5) Soit  $R$  un anneau commutatif,  $M, N$  des  $R$ -modules libres de base  $\mathcal{B}_M$  et  $\mathcal{B}_N$  respectivement. Montrer que  $M \otimes_R N$  est un  $R$ -module libre de base  $\mathcal{B}_M \times \mathcal{B}_N$ .

#### Exercice 2: (Centre d'un anneau)

Soit  $R$  un anneau et  $\Gamma$  son centre. Montrer que tout  $R$ -module à droite  $M$  (resp. à gauche  $N$ ) est muni d'une structure de  $\Gamma$ -module à gauche (resp. à droite) de telle manière que  $M \in {}_{\Gamma}\text{Mod}_R$  (resp.  $N \in {}_R\text{Mod}_{\Gamma}$ ). En déduire que  $M \otimes_R N$  est muni d'une structure de  $\Gamma$ -module.

- 1) En déduire que

$$\begin{array}{ccc} \text{Mod}_R(M, M') \times {}_R\text{Mod}(N, N') & \rightarrow & \mathcal{A}b(M \otimes_R N, M' \otimes_R N') \\ u \times v & \mapsto & u \otimes v \end{array}$$

détermine une application  $\Gamma$ -linéaire

$$\text{Mod}_R(M, M') \otimes_{\Gamma} {}_R\text{Mod}(N, N') \rightarrow {}_{\Gamma}\text{Mod}(M \otimes_R N, M' \otimes_R N')$$

#### Exercice 3: (Changement de base)

Soit  $\varphi : R \rightarrow S$  un morphisme d'anneaux.

- 1) Montrer que tout  $S$  module peut-être muni d'une structure de  $R$  module.
- 2) Montrer que  $\varphi$  induit un foncteur, appelé *restriction des scalaires*  $\varphi_* : {}_S\text{Mod} \rightarrow {}_R\text{Mod}$  (et aussi  $\varphi_* : \text{Mod}_S \rightarrow \text{Mod}_R$ ).
- 3) Montrer que  $\varphi$  induit un foncteur appelé *extension des scalaires*  $\varphi^* : {}_R\text{Mod} \rightarrow {}_S\text{Mod}$  qui à  $N$  associe  $S \otimes_R N$ .
- 4) Soient  $M$  un  $S$ -module à droite et  $N$  un  $S$ -module à gauche. Montrer que  $\varphi$  induit un morphisme de groupes abéliens  $M \otimes_R N \rightarrow M \otimes_S N$  et que  $\varphi^*$  est adjoint à gauche de  $\varphi_*$ .

**Exercice 4: (Homotopie de complexes de chaînes)**

1) Soit  $I_R$  le complexe de chaînes défini par

$$(I_R)_n = \begin{cases} R^2, & \text{si } n = 0, \\ R, & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et  $d : R \rightarrow R^2$  l'application donnée par  $dx = (x, -x)$ . Montrer que la donnée d'un morphisme de complexes de chaînes  $C \otimes I_R \rightarrow D$  est équivalente à la donnée de deux morphismes  $f, g : C \rightarrow D$  ainsi que d'une homotopie de  $f$  à  $g$ . Voyez-vous un analogue topologique à cette construction?

2) Soit  $i : R[0] \rightarrow I_R$  le morphisme de complexes de chaînes défini par  $i(r) = (0, r)$ . On note  $\overline{I}_r$  son conoyau.

a) Montrer que la suite exacte courte ainsi définie  $0 \rightarrow R[0] \rightarrow I_R \rightarrow \overline{I}_R \rightarrow 0$  est scindée en tout degré.

b) Montrer que pour tout complexe  $C$ ,  $C \otimes \overline{I}_R$  est exact.

c) en déduire que  $Id_C \otimes i : C \rightarrow C \otimes I_R$  est un quasi-isomorphisme. Est-ce une équivalence d'homotopie?

**Exercice 5: (Bockstein)**

Soit  $n$  un entier; on considère la suite exacte courte  $0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\times n} \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rightarrow 0$ . Soit  $C$  un complexe de chaîne tel que  $C_k$  est un groupe abélien libre pour tout  $k$ .

1) Justifier qu'il existe une suite exacte longue

$$\dots \rightarrow H_k(C) \rightarrow H_k(C) \xrightarrow{\rho_k} H_k(C \otimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \xrightarrow{\overline{\beta}_k} H_{k-1}(C) \rightarrow \dots$$

2) On note  $\beta_k$  la composée

$$H_k(C \otimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \xrightarrow{\overline{\beta}_k} H_{k-1}(C) \xrightarrow{\rho_{k-1}} H_{k-1}(C \otimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$$

Montrer que  $\beta_k \beta_{k+1} = 0$

3) On suppose que  $n = p$  est un nombre premier et que pour tout  $k$  le groupe  $H_k(C)$  est un groupe de  $p$ -torsion. Montrer que l'homologie du complexe  $H_*(C \otimes \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, \beta)$  est nulle.