Algèbre homologique et topologie algébrique
(Cours : M.Livernet, TD : C.Gille) 2017-2018
Université Paris Diderot – M2 de Mathématiques fondamentales

# Séance de TD n°3

29 septembre 2017

**Produit tensoriel.**

**Exercice 1:**

1) Qu'est-ce qu'une application quasi-bilinéaire pour des $\mathbb{Z}$-modules?

2) Montrer que $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/\mathrm{pgcd}(n,m)\mathbb{Z}$. Que se passe-t-il si $m$ et $n$ sont premiers entre eux?

3) Plus généralement, soient $R$ un anneau, $I$ un idéal à droite, $N$ un $R$-module à gauche. Montrer qu'il existe un isomorphisme naturel de groupes abéliens

$$R/I \otimes_R N \tilde{\to} N/IN$$

où $IN = \{i \cdot n, i \in I, n \in N\}$. En déduire un isomorphisme naturel de groupes abéliens

$$R/I \otimes_R R/J \tilde{\to} R/(I+J)$$

où $J$ est un idéal à gauche.

4) Soit $R$ un anneau et $M$ et $N$ deux $R$-modules à gauche. On suppose que $M$ est divisible et que $N$ est de torsion ($\forall y \in N, \exists b \in R\backslash\{0\}, by = 0$). Montrer que $M \otimes_R N = 0$.

5) Soir $R$ un anneau commutatif, $M$, $N$ des $R$-modules libres de base $\mathcal{B}_M$ et $\mathcal{B}_N$ respectivement. Montrer que $M \otimes_R N$ est un $R$-module libre de base $\mathcal{B}_M \times \mathcal{B}_N$.

**Exercice 2: (Centre d'un anneau)**

Soit $R$ un anneau et $\Gamma$ son centre.

1) Montrer que tout $R$-module à droite $M$ (resp. à gauche $N$) est muni d'une structure de $\Gamma$-module à gauche (resp. à droite) de telle manière que $M \in {}_{\Gamma}\mathrm{Mod}_R$ (resp. $N \in {}_R\mathrm{Mod}_{\gamma}$). En déduire que $M \otimes_R N$ est muni d'une structure de $\Gamma$-module.

2) En déduire que

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Mod_R}(M, M') \times {}_{\mathrm{R}}\mathrm{Mod}(N, N') & \to & \mathcal{A}\mathrm{b}(M \otimes_R N, M' \otimes_R N') \\ (u, v) & \mapsto & u \otimes v \end{array}$$

détermine une application $\Gamma$-linéaire

$$\mathrm{Mod_R}(M, M') \otimes_{\Gamma} {}_{\mathrm{R}}\mathrm{Mod}(N, N') \to {}_{\Gamma}\,\mathrm{Mod}(M \otimes_R N, M' \otimes_R N')$$

**Exercice 3: (Homotopie de complexes de chaines)**

1) Soit $I_R$ le complexe de chaines défini par

$$(I_R)_n = \begin{cases} R^2, & \text{si } n = 0, \\ R, & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et $d : R \to R^2$ l'application donnée par $dx = (x, -x)$. Montrer que la donnée d'un morphisme de complexes de chaines $C \otimes I_R \to D$ est équivalente à la donnée de deux morphismes $f, g : C \to D$ ainsi que d'une homotopie de $f$ à $g$. Voyez-vous un analogue topologique à cette construction?

2) Soit $i : R[0] \to I_R$ le morphisme de complexes de chaines défini par $i(r) = (0, r)$. On note $\overline{I_r}$ son conoyau.

a) Montrer que la suite exacte courte ainsi définie $0 \to R[0] \to I_R \to \overline{I_R} \to 0$ est scindée en tout degré.

b) Montrer que pour tout complexe $C$, $C \otimes \overline{I_R}$ est exact.

c) en déduire que $Id_C \otimes i : C \to C \otimes I_R$ est un quasi-isomorphisme. Est-ce une équivalence d'homotopie?

**Exercice 4: (Bockstein)**

Soit $n$ un entier; on considère la suite exacte courte $0 \to \mathbb{Z} \overset{\times n}{\to} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to 0$. Soit $C$ un complexe de chaine tel que $C_k$ est un groupe abélien libre pour tout $k$.

1) Justifier qu'il existe une suite exacte longue

$$\ldots \to H_k(C) \to H_k(C) \overset{\rho_k}{\to} H_k(C \otimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \overset{\overline{\beta_k}}{\to} H_{k-1}(C) \to \ldots$$

2) On note $\beta_k$ la composée

$$H_k(C \otimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \overset{\overline{\beta_k}}{\to} H_{k-1}(C) \overset{\rho_{k-1}}{\to} H_{k-1}(C \otimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$$

Montrer que $\beta_k \beta_{k+1} = 0$

3) On suppose que $n = p$ est un nombre premier et que pour tout $k$ le groupe $H_k(C)$ est un groupe de $p$-torsion. Montrer que l'homologie du complexe $(H_*(C \otimes \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}), \beta)$ est nulle.