Séance de TD n°4

6 octobre 2016

Résolutions, foncteurs dérivés.

Exercice 1: (Relèvements d'applications)

1) Démontrer le lemme du "fer à cheval" (Horseshoe lemma) vu en cours. On notera le bord sous forme matricielle $d = \begin{pmatrix} d' & \lambda \\ 0 & d'' \end{pmatrix}$. (cf Weibel p 37–38)

2) On se donne un diagramme de suites exactes courtes de R-modules

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "i_A"] \arrow[d, "f'"'] & A \arrow[r, "\pi_A"] \arrow[d, "f"'] & A'' \arrow[r] \arrow[d, "f''"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & B' \arrow[r, "i_B"] & B \arrow[r, "\pi_B"] & B'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

On se donne P', P'', Q', Q'' des résolutions projectives de A', A'', B' et B'' respectivement. On note ε', ε'', η', η'' les augmentations respectives. On note $P = P' \oplus P''$ et $Q = Q' \oplus Q''$ la résolution projective de A (resp. B) obtenue dans le cours, ε (resp. η) les augmentations). On note $F' : P' \to Q'$ et $F'' : P'' \to Q''$ des relèvements de f' et f'' respectivement. On veut montrer que l'on peut relever f en un morphisme de complexes de chaines $F : P \to Q$ de telle manière que le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & P' \arrow[r] \arrow[d, "F'"'] & P \arrow[r] \arrow[d, "F"'] & P'' \arrow[r] \arrow[d, "F''"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & Q' \arrow[r] & Q \arrow[r] & Q'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

soit commutatif et relève le diagramme précédent.

a) On note μ_P la restriction de ε à P''_0 et μ_Q celle de η à Q''_0. Montrer qu'il existe un morphisme $\beta : P''_0 \longmapsto B'$ tel que $i_B\beta = f\mu_P - \mu_Q F''_0$. On définit alors un relevé γ_0 de β à Q'_0 ($\beta = \eta'\gamma_0$), puis $F_0 = \begin{pmatrix} F'_0 & \gamma_0 \\ 0 & F''_0 \end{pmatrix}$.

b) Vérifier que F_0 rend le diagramme "au niveau 0" commutatif et que $\eta F_0 = f\varepsilon$.

c) Terminer la preuve par récurrence (cf Weibel p46-47).

Exercice 2: (Résolutions injectives)

Démontrer les résultats du cours suivant :

1) Si $\mathcal{A}$ est une catégorie abélienne ayant assez d'injectifs, alors tout objet de $\mathcal{A}$ admet une résolution injective. `En fait, fait en cours le 27 septembre`

2) Soient C et D deux complexes de cochaines vérifiant $C^n = D^n = 0, n < 0$. On suppose que $H^n(C) = 0, \forall n \geqslant 1$ et on suppose que pour tout $i \geqslant 0$, D_i est injectif. Alors pour tout $\psi : H^0(C) \to H^0(D)$, il existe un morphisme de complexes de cochaines $\varphi : C \to D$ tel que $H^0(\varphi) = \psi$. De plus φ est unique à homotopie près.

Exercice 3:

1) Soit $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un foncteur additif entre catégories abéliennes et $U : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ un foncteur additif et exact entre catégories abéliennes. Montrer que $U(L_iF)$ est isomorphe à $L_i(U(F))$ et que $U(R^iF)$ est isomorphe à $R^i(U(F))$

2) Soit $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un foncteur additif entre catégories abéliennes.
a) Montrer que L_0F est exact à droite et que R^0F est exact à gauche.
b) Montrer que

$$L_mL_nF = \begin{cases} L_mF, & \text{si } n = 0 \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exercice 4: (Calculs des foncteurs dérivés avec des petites résolutions)
Soit F un foncteur additif entre deux catégories abéliennes, exact à droite.

1) Montrer que si $0 \to M \to P \to A \to 0$ est exacte avec P projectif alors $L_i(F(A))$ est isomorphe à $L_{i-1}(F(M))$ pour tout $i \geqslant 2$. Montrer que $L_1F(A)$ est le noyau de $F(M) \to F(P)$.

2) On se donne une suite exacte

$$0 \to M_m \to P_m \to P_{m-1} \to \ldots \to P_0 \to A \to 0$$

où les P_i sont projectifs. Montrer que $L_i(F(A))$ est isomorphe à $L_{i-m-1}F(M_m)$ pour tout $i \geqslant m+2$ et que $L_{m+1}F(A)$ est le noyau de $F(M_m) \to F(P_m)$.

3) On dit qu'un objet Q est F-acyclique si $L_i(F(Q)) = 0$ pour tout $i \geqslant 1$.
Montrer que si $Q \to A$ est une résolution de A telle que Q_n est F-acyclique pour tout $n \geqslant 0$ alors $L_iF(A) = H_i(F(Q)), \forall i \geqslant 0$.

Exercice 5: (Foncteurs Ext)
Soit R un anneau commutatif. Soient A et B des R-modules. On rappelle que $\mathrm{Hom}_R(A, B)$ est muni d'une structure de R-modules.

1) Expliquez pourquoi $\mathrm{Ext}^n_R(A, B)$ est muni d'une structure de R-module.

2) Soit $\mu : A \to A$ et $\nu : B \to B$ les multiplications par un élément $r \in R$. Montrer que les morphismes μ^* et ν_* induits sur $\mathrm{Ext}^n_R(A, B)$ correspondent à la multiplication par r.

3) En déduire que si A est un R/r-module il en est de même pour $\mathrm{Ext}^n_R(A, B)$.

Exercice 6: (Foncteurs Ext et extensions, cf Weibel p76-77)

Soit A et B des R-modules. Une *extension* ξ de A par B est une suite exacte courte

$$0 \to B \to X \to A \to 0$$

On dit que deux extensions ξ et ξ' de A par B sont *équivalentes* s'il existe une diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\xi : 0 \arrow[r] & B \arrow[r] \arrow[d, "1_B"'] & X \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[r] \arrow[d, "1_A"'] & 0 \\
\xi' : 0 \arrow[r] & B \arrow[r] & X' \arrow[r] & A \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

On rappelle que l'extension est scindée si et seulement si elle est équivalente à l'extension

$$0 \to B \to B \oplus A \to A \to 0$$

1) Montrer que la relation d'équivalence d'extension est une relation d'équivalence et que si p est premier il y a exactement p classes d'équivalence d'extension de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ par $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ (dans $\mathcal{A}$b).

2) Soit ξ une extension. On note $\Theta(\xi)$ l'image de 1_A par le morphisme de connexion

$$Hom_R(A, A) \to \mathrm{Ext}^1(A, B)$$

a) Montrer que $\Theta(\xi) = 0$ si et seulement si ξ est scindée. En déduire que si $\mathrm{Ext}^1(A, B) = 0$ alors toute extension de A par B est scindée.

b) Montrer que si ξ et ξ' sont équivalentes alors $\Theta(\xi) = \Theta(\xi')$.

c) Montrer que Θ induit une bijection entre l'ensemble $\mathcal{E}xt_R(A, B)$ des classes d'équivalences des extensions de A par B et $\mathrm{Ext}^1(A, B)$.

3) Soient ξ et ξ' deux extensions de A par B et soit Y le R-module obtenu comme limite du diagramme suivant (pullback)

$$\begin{tikzcd}
 & X' \arrow[d] \\
X \arrow[r] & A
\end{tikzcd}$$

a) Montrer que la suite $0 \to B \to Y \to A \to 0$ est exacte. On note $\xi + \xi'$ l'extension ainsi obtenue. Cette extension s'appelle la somme de Baer de ξ et ξ'.

4) Montrer que $\Theta(\xi + \xi') = \Theta(\xi) + \Theta(\xi')$.

5) En déduire que la somme de Baer passe au quotient par la relation d'équivalence, qu'elle induit sur $\mathcal{E}xt_R(A, B)$ une structure de groupe abélien et que Θ est un isomorphisme de groupes.

Exercice 7: (Naturalité des foncteurs Tor et Ext)

1) Montrer que l'application qui à $A \in \mathrm{Mod_R}$ et $B \in {}_{\mathrm{R}}\mathrm{Mod}$ associe $\mathrm{Tor}_i^R(A, B)$ définit un bifoncteur $\mathrm{Mod_R} \times {}_{\mathrm{R}}\mathrm{Mod} \to \mathcal{A}b$

2) Montrer que l'application qui à $A \in {}_{\mathrm{R}}\mathrm{Mod}$ et $B \in {}_{\mathrm{R}}\mathrm{Mod}$ associe $\mathrm{Ext}^i_R(A, B)$ définit un bifoncteur $({}_{\mathrm{R}}\mathrm{Mod})^{op} \times {}_{\mathrm{R}}\mathrm{Mod} \to \mathcal{A}b$