Séance de TD n°4

mise à jour le 15 octobre 2017, avec correction de l'erreur d'énoncé dans la question 3 de l'exercice 3

Résolutions, foncteurs dérivés.

Exercice 1:

1) Soit $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un foncteur additif entre catégories abéliennes et $U : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ un foncteur additif et exact entre catégories abéliennes. Montrer que $U(L_iF)$ est isomorphe à $L_i(U(F))$ et que $U(R^iF)$ est isomorphe à $R^i(U(F))$.

2) Soit $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un foncteur additif entre catégories abéliennes.
a) Montrer que L_0F est exact à droite et que R^0F est exact à gauche.
b) Montrer que

$$L_mL_nF = \begin{cases} L_mF, & \text{si } n = 0 \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exercice 2: (Calculs des foncteurs dérivés avec des petites résolutions)

Soit F un foncteur additif entre deux catégories abéliennes, exact à droite.

1) Montrer que si $0 \to M \to P \to A \to 0$ est exacte avec P projectif alors $L_i(F(A))$ est isomorphe à $L_{i-1}(F(M))$ pour tout $i \geqslant 2$. Montrer que $L_1F(A)$ est le noyau de $F(M) \to F(P)$.

2) On se donne une suite exacte

$$0 \to M_m \to P_m \to P_{m-1} \to \ldots \to P_0 \to A \to 0$$

où les P_i sont projectifs. Montrer que $L_i(F(A))$ est isomorphe à $L_{i-m-1}F(M_m)$ pour tout $i \geqslant m+2$ et que $L_{m+1}F(A)$ est le noyau de $F(M_m) \to F(P_m)$.

3) On dit qu'un objet Q est F-acyclique si $L_i(F(Q)) = 0$ pour tout $i \geqslant 1$.
Montrer que si $Q \to A$ est une résolution de A telle que Q_n est F-acyclique pour tout $n \geqslant 0$ alors $L_iF(A) = H_i(F(Q)), \forall i \geqslant 0$.

Exercice 3: (Foncteurs Ext et extensions) cf Weibel p76-77

Soit A et B des R-modules. Une *extension* ξ de A par B est une suite exacte courte

$$0 \to B \to X \to A \to 0$$

On dit que deux extensions ξ et ξ' de A par B sont *équivalentes* s'il existe une diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\xi : 0 \arrow[r] & B \arrow[r] \arrow[d, "1_B"'] & X \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[r] \arrow[d, "1_A"'] & 0 \\
\xi' : 0 \arrow[r] & B \arrow[r] & X' \arrow[r] & A \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

On rappelle que l'extension est scindée si et seulement si elle est équivalente à l'extension

$$0 \to B \to B \oplus A \to A \to 0$$

1) Montrer que la relation d'équivalence d'extension est une relation d'équivalence et que si p est premier il y a exactement p classes d'équivalence d'extension de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ par $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ (dans $\mathcal{A}$b).

2) Soit ξ une extension. On note $\Theta(\xi)$ l'image de 1_A par le morphisme de connexion

$$Hom_R(A,A) \to \mathrm{Ext}^1(A,B)$$

a) Montrer que $\Theta(\xi)=0$ si et seulement si ξ est scindée. En déduire que si $\mathrm{Ext}^1(A,B)=0$ alors toute extension de A par B est scindée.

b) Montrer que si ξ et ξ' sont équivalentes alors $\Theta(\xi)=\Theta(\xi')$.

c)

Montrer que Θ induit une bijection entre l'ensemble $\mathcal{E}xt_R(A,B)$ des classes d'équivalences des extensions de A par B et $\mathrm{Ext}^1(A,B)$.

3) Soient ξ_1 et ξ_2 deux extensions de A par B et soit $K=\{(x_1,x_2)\in X_1\times X_2 | \pi_1(x_1)=\pi_2(x_2)\}$ le R-module obtenu comme limite du diagramme suivant (pullback)

$$\begin{tikzcd} & X_1 \arrow[d] \\ X_2 \arrow[r] & A \end{tikzcd}$$

On note $N=\{(i_1b,-i_2b), b\in B\}\subset K$ et $Y=K/N$.

a) Montrer que la suite $0 \longrightarrow B \xrightarrow{i} Y \xrightarrow{\pi} A \longrightarrow 0$ où π est l'application qui à la classe de (x_1,x_2) associe $\pi_1(x_1)=\pi_2(x_2)$ et i est l'application qui à b associe la classe de $(i_1(b),0)$ est exacte. On note $\xi_1+\xi_2$ l'extension ainsi obtenue. Cette extension s'appelle la somme de Baer de ξ_1 et ξ_2.

4) Montrer que $\Theta(\xi_1+\xi_2)=\Theta(\xi_1)+\Theta(\xi_2)$.

5) En déduire que la somme de Baer passe au quotient par la relation d'équivalence, qu'elle induit sur $\mathcal{E}xt_R(A,B)$ une structure de groupe abélien et que Θ est un isomorphisme de groupes.

Exercice 4: (Extrait de l'examen du 4 novembre 2016)

Soit R un anneau et B un R-module à gauche. Pour $r\in R$, on note ${}_rB=\{b\in B | r\cdot b=0\}$ et $r\cdot B=\{r\cdot b, b\in B\}$.

1. On pose $R=\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ et $A=\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ avec d divise m et $m\geqslant 2$. Montrer que, pour tout R-module B, on a:

$$\begin{cases} \mathrm{Ext}^0_R(A,B) = {}_dB \\ \mathrm{Ext}^i_R(A,B) = ({}_{\frac{m}{d}}B)/(d\cdot B), & \text{si } i \text{ est impair,} \\ \mathrm{Ext}^i_R(A,B) = ({}_dB)/(\frac{m}{d}\cdot B), & \text{si } i\geqslant 2 \text{ est pair.} \end{cases}$$

2. Donner une extension représentative pour chaque classe d'équivalence d'extensions de $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ par $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ en tant que $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$-module.