Solution de l'exercice 1 du TD4 (proposée par Daniel ZIMMER)

1) Soient $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un foncteur additif entre catégories abéliennes et $U : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ un foncteur additif et exact entre catégories abéliennes. Soit $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ et soit $P_\bullet \xrightarrow{\varepsilon} A \to 0$ une résolution projective de A dans $\mathcal{A}$. On considère alors les complexes

$$\cdots \longrightarrow F(P_i) \longrightarrow \cdots \longrightarrow F(P_1) \longrightarrow F(P_0) \xrightarrow{F(\varepsilon)} F(A),$$

et

$$\cdots \longrightarrow U(F(P_i)) \longrightarrow \cdots \longrightarrow U(F(P_1)) \longrightarrow U(F(P_0)) \xrightarrow{U(F(\varepsilon))} U(F(A)).$$

Alors, par définition, pour tout $i \geq 0$,

$$U(L_iF)(A) = U(H_i(F(P_\bullet)) \quad \text{et} \quad L_iU(F)(A) = H_i(U(F(P_\bullet))).$$

Voir que les foncteurs $U(L_iF)$ et $L_i(U(F))$ sont isomorphes revient donc à voir que U "commute avec l'homologie". Or ceci est clair par exactitude de U, puisque pour tout morphisme δ dans $\mathcal{B}$ on a $U(\operatorname{im}\delta) = \operatorname{im}U(\delta)$ et $U(\ker\delta) = \ker U(\delta)$.

Le même argument montre que U "commute avec la cohomologie" et donc $U(R^iF)$ est isomorphe à $R^i(U(F))$.

2) Soit $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un foncteur additif entre catégories abéliennes.

a) Considérons une suite exacte

$$0 \longrightarrow A' \xrightarrow{f} A \xrightarrow{g} A'' \longrightarrow 0$$

dans $\mathcal{A}$. On a alors une suite exacte longue en homologie

$$\cdots \longrightarrow L_iF(A') \xrightarrow{L_iF(f)} L_iF(A) \xrightarrow{L_iF(g)} L_iF(A'') \longrightarrow L_{i-1}F(A') \longrightarrow \cdots$$
$$\cdots \longrightarrow L_1F(A'') \longrightarrow L_0F(A') \xrightarrow{L_0F(f)} L_0F(A) \xrightarrow{L_0F(g)} L_0F(A'') \longrightarrow 0.$$

En particulier, en tronquant cette suite on a la suite exacte

$$L_0F(A') \xrightarrow{L_0F(f)} L_0F(A) \xrightarrow{L_0F(g)} L_0F(A'') \longrightarrow 0$$

et donc on en conclut que le foncteur L_0F est bien exact à droite.

De même on a une suite exacte longue en cohomologie

$$0 \longrightarrow R^0F(A') \xrightarrow{R^0F(f)} R^0F(A) \xrightarrow{R^0F(g)} R^0F(A'') \longrightarrow R^1F(A') \longrightarrow \cdots$$
$$\cdots \longrightarrow R^iF(A') \xrightarrow{R^iF(f)} R^iF(A) \xrightarrow{R^iF(g)} R^iF(A'') \longrightarrow \cdots$$

et donc le foncteur R^0F est exact à gauche.

b) Soit $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ et soit $P_\bullet \xrightarrow{\varepsilon} A \to 0$ une résolution projective de A dans $\mathcal{A}$. Appliquons le foncteur L_nF à cette résolution :

$$\cdots \longrightarrow L_nF(P_i) \longrightarrow \cdots \longrightarrow L_nF(P_1) \longrightarrow L_nF(P_0) \longrightarrow L_nF(A).$$

En fait, si $n \geq 1$, on a $L_nF(P_i) = 0$ pour tout $i \geq 0$ puisque les P_i sont projectifs. Il est donc clair que dans ce cas, pour tout $m \geq 0$,

$$L_mL_nF(P) = 0.$$

Si maintenant $n = 0$, encore grâce à la projectivité des P_i, on a que $L_0F(P_i) = F(P_i)$. Finalement on en déduit donc que calculer l'homologie de

$$\cdots \longrightarrow L_0F(P_i) \longrightarrow \cdots \longrightarrow L_0F(P_1) \longrightarrow L_0F(P_0) \longrightarrow L_0F(A)$$

revient à calculer l'homologie de

$$\cdots \longrightarrow F(P_i) \longrightarrow \cdots \longrightarrow F(P_1) \longrightarrow F(P_0) \longrightarrow L_0F(A),$$

et en particulier, pour tout $m \geq 0$,

$$L_mL_0(A) = L_m(A).$$