TD4 exercice 3 : Extensions

Seginus Mowlavi

15 octobre 2017

Question 1 L'identité et la composition donnent la réflexivité et la transitivité de la relation d'équivalence. Pour la symétrie, il suffit de remarquer qu'un isomorphisme d'extensions donne un isomorphisme de modules d'après le lemme des cinq.

Classification des extensions de groupes abéliens de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ par $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$: X est de cardinal p^2, donc $X = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ou $X = \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$; ces deux groupes ne peuvent pas donner d'extensions isomorphes (puisqu'ils ne sont pas isomorphes).

- Si $X = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$: en considérant ces groupes comme des $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$-modules (cela passe aux morphismes), $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est libre donc la suite est scindée ; elle est donc équivalente à l'extension triviale
$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \xrightarrow{i_1} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \xrightarrow{\pi_2} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$
- Pour $a \in \{1, \ldots, p-1\}$, notons ξ_a l'extension
$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \xrightarrow{i_a} \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z} \xrightarrow{\pi_1} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$
où π_1 est la projection canonique, et $i_a \colon \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ envoie 1 sur ap. Ces extensions sont deux à deux non équivalentes : en effet, une équivalence $\varphi\colon \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ devrait envoyer 1 sur $kp+1$, et donc p sur $kp^2 + p = p$, donc induit l'identité sur $p\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z} = \mathrm{im}(i_a)$.
Enfin, soit ξ est l'extension suivante
$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \xrightarrow{i} \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z} \xrightarrow{\pi} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$
Notons $b = \pi(1)$: définissons $\varphi\colon \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ la multiplication par c où $c \in \{1, \ldots, p-1\}$ est tel que $bc = 1$ modulo p. Cela donne l'isomorphisme
$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \arrow[r, "i"] \arrow[d, equal] & \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z} \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\phi"] & \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \arrow[r, "\varphi i"] & \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z} \arrow[r, "\pi_1"] & \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$
et on remarque que φi est nécessairement de la forme i_a.

Question 2.a $\Theta(\xi) = 0$ ssi 1_A est dans l'image de $\mathrm{Hom}(A, X) \to \mathrm{Hom}(A, A)$, ssi $1_A = \pi s$ pour un $s \in \mathrm{Hom}(A, X)$, ssi ξ est scindée (caractérisation par l'existence d'une section).

Question 2.b Par fonctorialité de la suite exacte longue, un isomorphisme
$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & B \arrow[r] \arrow[d, equal] & X \arrow[r] \arrow[d, "\phi"] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & B \arrow[r] & X' \arrow[r] & A \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$
induit un diagramme commutatif
$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(A, A) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathrm{Ext}^1(A; B) \arrow[d, equal] \\
\mathrm{Hom}(A, A) \arrow[r] & \mathrm{Ext}^1(A, B)
\end{tikzcd}$$
d'où l'égalité $\Theta(\xi) = \Theta(\xi')$.

Question 2.c Pour comprendre précisément ce que fait Θ, il faut comprendre comment s'articule la suite exacte longue. La solution se trouve dans le fer à cheval :

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & B \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\varepsilon_B"] & X \arrow[r, "\pi"] \arrow[dl, dashed, "j"] & A \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon_A"] \arrow[ddll, dashed, "\psi"'] & 0 \\
 & I_B^0 \arrow[d, "d_B^0"] & & I_A^0 \arrow[d, "d_A^0"] \arrow[dll, dashed, "\psi^0"] & \\
 & I_B^1 \arrow[d, "d_B^1"] & & I_A^1 \arrow[d, "d_A^1"] \arrow[dll, dashed, "\psi^1"] & \\
 & \cdots & & \cdots &
\end{tikzcd}$$

Explications : on obtient j par injectivité de I_B^0. On a alors $d_B^0 ji = d_B^0 \varepsilon_B = 0$, donc $d_B^0 j$ se factorise par le conoyau de i, à savoir π : $d_B^0 j = \psi\pi$. L'injectivité de I_B^1 donne ψ^0. A présent, remarquons que ψ^0 envoie $\ker(d_A^0)$ dans $\ker(d_B^1)$: en effet, $\ker(d_A^0) = \mathrm{im}(\varepsilon_A)$, et $d_B^1\psi_0\varepsilon_A\pi = d_B^1\psi\pi = d_B^1 d_B^0 j = 0$ donc $d_B^1\psi_0 = 0$ par surjectivité de π. Ainsi, comme les complexes I_A et $I_B[1]$ sont exacts et composés d'injectifs, ψ_0 s'étend en $\psi^* : I_A \to I_B[1]$.

Le mapping cône de ψ^* donne la résolution injective pour X :

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & B \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\varepsilon_B"] & X \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\varepsilon"] & A \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon_A"] & 0 \\
0 \arrow[r] & I_B^0 \arrow[r] \arrow[d, "d_B^0"] & I_B^0 \oplus I_A^0 \arrow[r] \arrow[d, "d^0"] & I_A^0 \arrow[r] \arrow[d, "d_A^0"] & 0 \\
0 \arrow[r] & I_B^1 \arrow[r] \arrow[d, "d_B^1"] & I_B^1 \oplus I_A^1 \arrow[r] \arrow[d, "d^1"] & I_A^1 \arrow[r] \arrow[d, "d_A^1"] & 0 \\
 & \cdots & \cdots & \cdots &
\end{tikzcd}$$

On a alors $d^0(x_B, x_A) = (d_B^0(x_B) - \psi^0(x_A), d_A^0(x_A))$, et tout s'emboîte bien avec $\varepsilon = (j, \epsilon_A\pi)$.

Passons à $\mathrm{Hom}(A, -)$:

$$\begin{tikzcd}
 & & 1_A \in \mathrm{Hom}(A,A) \arrow[d, "(\varepsilon_A)_*"] \\
 & (0, \varepsilon_A) \in \mathrm{Hom}(A, I_B^0 \oplus I_A^0) \arrow[r] \arrow[d, "(d^0)_*"] & \varepsilon_A \in \mathrm{Hom}(A, I_A^0) \arrow[d, "(d_A^0)_*"] \\
-\psi^0\varepsilon_A \in \mathrm{Hom}(A, I_B^1) \arrow[r] & (-\psi^0\varepsilon_A, 0) \in \mathrm{Hom}(A, I_B^1 \oplus I_A^1) \arrow[r] & 0 \in \mathrm{Hom}(A, I_A^1)
\end{tikzcd}$$

Ceci montre que l'image de 1_A par le morphisme de connexion, c'est-à-dire $\Theta(\xi)$, est $[-\psi^0\varepsilon_A] = [-\psi] \in \mathrm{Ext}^1(A, B)$.

On peut à présent attaquer le problème.

— Remarquons d'abord que X est isomorphe à

$$\begin{aligned}
\ker(d^0) &= \left\{(x_B, x_A) \in I_B^0 \oplus I_A^0 \;\middle|\; (d_B^0(x_B) - \psi^0(x_A), d_A^0(x_A)) = 0\right\} \\
&= \left\{(x, a) \in I_B^0 \oplus A \;\middle|\; d_B^0(x) - \psi^0\epsilon_A(a) = 0\right\} \\
&= \left\{(x, a) \in I_B^0 \oplus A \;\middle|\; d_B^0(x) - \psi(a) = 0\right\}
\end{aligned}$$

de manière à rendre l'extension ξ équivalente à l'extension suivante, notée $\xi_{-\psi}$:

$$0 \longrightarrow B \xrightarrow{(\varepsilon_B,0)} X_{-\psi} := \left\{(x,a) \in I_B^0 \oplus A \;\middle|\; d_B^0(x) - \psi(a) = 0\right\} \xrightarrow{\pi_A} A \longrightarrow 0$$

Ceci donne la surjectivité de Θ. En effet, étant donnée un élément $[-\psi]$ de $\mathrm{Ext}^1(A,B)$ représenté par $\psi \in \mathrm{Hom}(A, I_B^1)$, la suite

$$0 \longrightarrow B \xrightarrow{(\varepsilon_B,0)} X_{-\psi} \xrightarrow{\pi_A} A \longrightarrow 0$$

est exacte (le seul point non trivial est la surjectivité de π_A, qui vient du fait que ψ est un cocycle, c'est-à-dire $d_B^1\psi = 0$), donc ξ_ψ est une extension. Comme le diagramme

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & B \arrow[r, "{(\varepsilon_B,0)}"] \arrow[d, "\varepsilon_B"] & X_{-\psi} \arrow[r, "\pi_A"] \arrow[dl, "\pi_{I_B^0}"] & A \arrow[r] \arrow[ddll, "\psi"] & 0 \\
& I_B^0 \arrow[d, "d_B^0"] & & & \\
& I_B^1 & & &
\end{tikzcd}$$

est commutatif, donc le raisonnement précédent donne $\Theta(\xi_{-\psi}) = [-\psi]$, ce qui est ce qu'on voulait.

— Maintenant pour l'injectivité, rappelons qu'on a vu que toute extension était équivalente à une extension $\xi_{-\psi}$ pour un $\psi \in \mathrm{Hom}(A, I_B^1)$. Considérons donc $\psi, \psi' \in \mathrm{Hom}(A, I_B^1)$ telles que $\Theta(\xi_{-\psi}) = \Theta(\xi_{-\psi'})$, c'est-à-dire $[-\psi] = [-\psi']$, c'est à dire qu'il existe $\varphi \in \mathrm{Hom}(A, I_B^0)$ tel que $\psi - \psi' = (d_B^0)_*(\varphi) = d_B^0\varphi$. On construit alors une équivalence entre $\xi_{-\psi}$ et $\xi_{-\psi'}$ par

$$\varphi\colon \begin{array}{ccc} X_{-\psi'} & \to & X_{-\psi} \\ (x,a) & \mapsto & (x+\varphi(a), a) \end{array}$$

On vérifie que l'application est bien définie à savoir $d_B^0(x+\varphi(x)) = \psi'(a) + \psi(a) - \psi'(a) = \psi(a)$.

Question 3 On considère $Y = K/N$ avec

— K est le pullback

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[r, "\varphi_1"] \arrow[d, "\varphi_2"] & X_1 \arrow[d, "\pi_1"] \\
X_2 \arrow[r, "\pi_2"] & A
\end{tikzcd}$$

c'est-à-dire $K = \{(x_1,x_2) \in X_1 \times X_2 | \pi_1(x_1) = \pi_2(x_2)\}$.

— N est l'image $i'(B)$, où i' est défini par

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[dr, dashed, "i'"] \arrow[drr, bend left, "i_1"] \arrow[ddr, bend right, "-i_2"'] & & \\
& K \arrow[r, "\varphi_1"] \arrow[d, "\varphi_2"] & X_1 \arrow[d, "\pi_1"] \\
& X_2 \arrow[r, "\pi_2"] & A
\end{tikzcd}$$

c'est-à-dire $N = \{(i_1 b, -i_2 b), b \in B\} \subset K$.

Les morphismes de et vers Y sont définis comme suit :

— $\pi_1\phi_1 i' = \pi_1 i_1 = 0$ donc $\pi_1\phi_1\colon K \to A$ se factorise en $\pi\colon Y \to A$. Autrement dit $\pi : Y = K/N \to A$ est l'application qui à la classe de (x_1,x_2) associe $\pi_1(x_1) = \pi_2(x_2)$;

— Le diagramme

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[dr, dashed, "\widetilde{i}_1"] \arrow[drr, bend left, "i_1"] \arrow[ddr, bend right, "0"'] & & \\
& K \arrow[r, "\varphi_1"] \arrow[d, "\varphi_2"] & X_1 \arrow[d, "\pi_1"] \\
& X_2 \arrow[r, "\pi_2"] & A
\end{tikzcd}$$

donne $\widetilde{i}_1 \colon B \to K$, que l'on compose avec la projection naturelle $K \to Y$ pour donner $i \colon B \to Y$. (Remarque : comme $\widetilde{i}_2 - \widetilde{i}_1 = i'$ par propriété universelle du pullback, on aurait eu le même résultat avec $\widetilde{i}_2$ à la place de $\widetilde{i}_1$.)

Autrement dit $i : B \to Y$ est l'application qui à b associe la classe de $(i_1(b), 0)$.

Montrons que la suite $0 \longrightarrow B \xrightarrow{i} Y \xrightarrow{\pi} A \longrightarrow 0$ est exacte.

La surjectivité de π, l'injectivité de i et l'égalité $\pi \circ i = 0$ sont immédiates. Si $(x_1, x_2) \in K$ est un représentant d'un élément z de $\ker(\pi)$ alors $x_1 = i_1 b$ et $x_2 = i_2 b'$ donc $(x_1, x_2) = (i_1(b + b'), 0) + (-i_1(b'), i_2(b'))$ ce qui prouve que $z = i(b + b')$ est dans l'image de i.

Question 4 Par abus de notation, π désignera aussi bien $Y \to A$ que $K \to A$.

Comme à la question 2.c, prenons $j_1 \colon X_1 \to I_B^0$ et $\psi_1 \colon A \to I_B^1$ de manière à faire commuter le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & B \arrow[r, "\widetilde{i}_1"] \arrow[d, "\varepsilon_B"] \arrow[dr, "i_1"] & K \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\varphi_1"] & A \arrow[r] \arrow[ddll, bend left, "\psi_1"] & 0 \\
& I_B^0 \arrow[d, "d_B^0"] & X_1 \arrow[l, "j_1"] \arrow[ur, "\pi_1"] & & \\
& I_B^1 & & &
\end{tikzcd}$$

De même, en remplaçant tous les 1 par des 2 dans ce diagramme (y compris pour $\widetilde{i}$), on obtient j_2 et ψ_2.

A présent, étudions $j_1\varphi_1 + j_2\varphi_2 \colon K \to I_B^0$:

$$(j_1\varphi_1 + j_2\varphi_2)i' = j_1 i_1 - j_2 i_2 = \varepsilon_B - \varepsilon_B = 0,$$

ce qui montre que cette application se factorise en $j \colon Y \to I_B^0$

On vérifie : $ji = (j_1\varphi_1 + j_2\varphi_2)\widetilde{i}_1 = j_1 i_1 + j_2 0 = j_1 i_1 = \varepsilon_B$, ce qui permet de suivre le raisonnement de 2.c.

Pour poursuivre ce raisonnement, on remarque que $(\psi_1 + \psi_2)\pi \colon Y \to I_B^1$ est induite par $(\psi_1 + \psi_2)\pi \colon K \to I_B^1$. Cette dernière application vaut $d_B^0(j_1\varphi_1 + j_2\varphi_2)$, donc induit $d_B^0 j \colon Y \to I_B^1$. C'est-à-dire que $(\psi_1 + \psi_2)\pi = d_B^0 j$.

Il vient donc $\Theta(\xi_1 + \xi_2) = [-(\psi_1 + \psi_2)] = \Theta(\xi_1) + \Theta(\xi_2)$.

`Remarque.` En reprenant les notations de la question 2c et les descriptions à l'aide des éléments des objets K, N, Y, i et π de la question 3, on peut raisonner directement avec les éléments. On construit $j : K \to I_B^0$ par $j(x_1, x_2) = j_1 x_1 + j_2 x_2$. Il est clair que j passe au quotient par N et que $ji = j_1 i_1 = \epsilon_B$. Par ailleurs si (x_1, x_2) est un représentant de $z \in Y$ on a $(\psi_1 + \psi_2)\pi(z) = \psi_1\pi_1 x_1 + \psi_2\pi_2 x_2 = d_B^0(j_1 x_1 + j_2 x_2) = d_B^0 j(z)$. D'où la même conlcusion $\Theta(\xi_1 + \xi_2) = [-(\psi_1 + \psi_2)] = \Theta(\xi_1) + \Theta(\xi_2)$.

Question 5 On a vu en 2.c que Θ définit une bijection entre l'ensemble des extensions à équivalence près et $\mathrm{Ext}^1(A; B)$. Θ^{-1} fournit alors une structure de groupe sur $\mathcal{E}(A, B)$ à partir de celle sur $\mathrm{Ext}^1(A, B)$. La question 4 montre qu'elle coincide avec la somme de Baer. Donc cette somme passe au quotient modulo l'équivalence et Θ est un isomorphisme de groupes.