TD 4

Arthur Garnier

11 octobre 2017

Exercice 3 :

1) Prenons trois extensions

$$\xi \ : \ 0 \longrightarrow B \longrightarrow X \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

$$\xi' \ : \ 0 \longrightarrow B \longrightarrow X' \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

$$\xi'' \ : \ 0 \longrightarrow B \longrightarrow X'' \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

On a clairement $\xi \sim \xi$ via $id : X \to X$. Ensuite, si $\xi \sim \xi'$ via $f : X \to X'$, le lemme des cinq entraîne que f est un isomorphisme, et le diagramme avec $f^{-1} : X' \to X$ commute car celui avec f commute, donc f^{-1} donne l'équivalence $\xi' \sim \xi$. Enfin, si $\xi \sim \xi'$ et $\xi' \sim \xi''$ via $f : X \to X'$ et $g : X' \to X''$ respectivement, en posant $h := g \circ f : X \to X''$, on obtient $\xi \sim \xi''$. Ceci montre que la relation $\sim$ d'équivalence des extensions est bien une relation d'équivalence. Ensuite, considérons une extension

$$\xi \ : \ 0 \longrightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \longrightarrow X \longrightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

On doit alors avoir $\mathrm{card}(X) = p^2$ et comme X est un groupe abélien, on ne peut avoir que $X = \left(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\right)^2$ ou $X = \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$. Supposons d'abord que $X = \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ et soit $f : \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$. Il induit un $\widetilde{f} : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ tel que $\widetilde{f}(p) = 0$, donc $\widetilde{f}(1)$ est d'ordre divisant p et donc $\widetilde{f}(1) = 0$, auquel cas $f = 0$ ou bien $\widetilde{f}(1)$ est d'ordre exactement p. Or, il y a exactement $\varphi(p) = p - 1$ éléments d'ordre p dans $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ et pour chacun de ces éléments, on obtient une extension. Enfin, l'extension avec $X = \left(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\right)^2$ ne peut être que l'extension scindée et on obtient donc p extensions possibles, à équivalence près.