Algèbre homologique et topologie algébrique
Séance de TD n°4 - Exercice 3–Première question

Correction proposée par Daniel Zimmer

Solution de l'Exercice 3

1) Notons $\xi \sim \xi'$ pour ξ est équivalente à ξ'. On vérifie bien que ceci définit une relation d'équivalence. Elle est bien réflexive : si ξ est une extension de A par B, alors on a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\xi \,:\, 0 \arrow[r] & B \arrow[r] \arrow[d, equal] & X \arrow[r] \arrow[d, equal] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
\xi \,:\, 0 \arrow[r] & B \arrow[r] & X \arrow[r] & A \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

et donc $\xi \sim \xi$. Elle est également transitive : si ξ, ξ' et ξ'' sont trois extensions et de plus $\xi \sim \xi'$ et $\xi' \sim \xi''$, on a alors un diagramme

$$\begin{tikzcd}
\xi \,:\, 0 \arrow[r] & B \arrow[r] \arrow[d, equal] & X \arrow[r] \arrow[d, "f"'] \arrow[dd, bend left, "gf"] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
\xi' \,:\, 0 \arrow[r] & B \arrow[r] \arrow[d, equal] & X' \arrow[r] \arrow[d, "g"'] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
\xi'' \,:\, 0 \arrow[r] & B \arrow[r] & X'' \arrow[r] & A \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

et donc la composée gf nous permet de conclure que $\xi \sim \xi''$. Enfin, pour la symétrie de la relation, remarquons que par le lemme de cinq, si $\xi \sim \xi'$ par un diagramme

$$\begin{tikzcd}
\xi \,:\, 0 \arrow[r] & B \arrow[r] \arrow[d, equal] & X \arrow[r] \arrow[d, "f"] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
\xi' \,:\, 0 \arrow[r] & B \arrow[r] & X' \arrow[r] & A \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

alors le morphisme $X \xrightarrow{f} X'$ est un isomorphisme. En notant son inverse f^{-1}, on obtient un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\xi \,:\, 0 \arrow[r] & B \arrow[r] \arrow[d, equal] & X \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
\xi' \,:\, 0 \arrow[r] & B \arrow[r] & X' \arrow[r] \arrow[u, "f^{-1}"] & A \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

et donc $\xi' \sim \xi$.

Examinons à présent les classes d'équivalence d'extensions de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ par lui-même. Commençons par remarquer que si

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \longrightarrow X \longrightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \longrightarrow 0.$$

est une telle extension, alors $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \cong X/(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ est donc on en déduit que X doit être un groupe d'ordre p^2. De plus puisqu'on considère les extensions dans $\mathcal{A}$b, X doit être abélien et finalement on en déduit que

$$X = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \quad \text{ou} \quad X = \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}.$$

Dans le premier cas il n'y a qu'une seule classe d'équivalence d'extensions : celle de l'extension scindée

$$\sigma \ : \ 0 \longrightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \xrightarrow{\iota} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \xrightarrow{\pi} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

où ι et π sont respectivement l'injection sur le premier facteur et la projection sur le second. En effet, soit

$$\xi \ : \ 0 \longrightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \xrightarrow{\iota'} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \xrightarrow{\pi'} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

une autre extension. Cette extension est en fait scindée comme suite exacte courte $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$-espaces vectoriels (car $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est un corps et toute suite exacte courte d'espaces vectoriels est scindée). Soit $s : \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ une section de cette suite dans ${}_{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}}\mathrm{Mod}$, en particulier s est un morphisme de groupes abéliens et donc la suite est aussi scindée dans $\mathcal{A}$b. Par conséquent, ξ est équivalente à l'extension σ définie ci-dessus.

Traitons à présent le cas $X = \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$. Soit

$$\xi \ : \ 0 \longrightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \xrightarrow{j} \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z} \xrightarrow{q} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \longrightarrow 0,$$

une telle extension. Un homomorphisme $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z} \xrightarrow{q} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est toujours de la forme $[n] \mapsto [kn]$ pour un certain $k \in \mathbb{Z}$. On peut en fait supposer $k \in \{1, \ldots, p-1\}$. Pour que q soit surjective, il faut de plus que $k \neq 0$. Son noyau est alors

$$\begin{aligned} \ker q &= \{[n] \in \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z} \ : \ [kn] = 0 \text{ dans } \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\}, \\ &= \{[n] \in \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z} \ : \ kn = pm \text{ pour un } m \in \mathbb{Z}\}, \end{aligned}$$

or k n'est pas un multiple de p donc

$$\ker q = \{[pm] \in \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z} \ : \ m \in \mathbb{Z}\}.$$

Pour que la suite soit exacte, il faut donc que j soit la multiplication par un multiple de p, c'est-à-dire que la forme $[n] \mapsto [lpn]$ pour un certain $l \in \mathbb{Z}$ tel que $[l] \neq 0$ dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Définissons à présent les extensions

$$\xi_i \ : \ 0 \longrightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \xrightarrow{\phi} \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z} \xrightarrow{\pi_i} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

pour $1 \leq i \leq p-1$, avec ϕ la multiplication par p définie pour $n \in \mathbb{Z}$ par $\phi([n]) = [pn]$ et π_i la multiplication par i et projection sur $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ définie pour $n \in \mathbb{Z}$ par $\pi_i([n]) = [in]$.

Il est clair que notre ξ est équivalente à ξ_k. En effet, puisque j est la multiplication par lp avec l non congru à 0 modulo p, $[l]$ est inversible dans $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ et on a donc un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\xi & : & 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} & \xrightarrow{j} & \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z} & \xrightarrow{q} & \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} & \longrightarrow & 0 \\
 & & & & \Vert & & \downarrow{\scriptstyle f} & & \Vert & & \\
\xi_k & : & 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} & \xrightarrow{\phi} & \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z} & \xrightarrow{\pi_k} & \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

où f est la multiplication par $[l]^{-1}$ dans $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$, donc $\xi \sim \xi_k$.

Il ne reste plus qu'à voir que les ξ_i sont inéquivalentes entre elles. Supposons que $\xi_k \sim \xi_{k'}$, on a alors un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\xi_k & : & 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} & \xrightarrow{\phi} & \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z} & \xrightarrow{\pi_k} & \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} & \longrightarrow & 0 \\
 & & & & \Vert & & \downarrow{\scriptstyle \eta} & & \Vert & & \\
\xi_{k'} & : & 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} & \xrightarrow{\phi} & \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z} & \xrightarrow{\pi_{k'}} & \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

Puisque η est un automorphisme de $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$, on peut supposer que $\eta([n]) = [\eta n]$ pour $\eta \in \mathbb{Z} \backslash p\mathbb{Z}$. Par la commutativité du carré de gauche, on a alors $[p] = [\eta p]$ dans $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$, c'est-à-dire que $[\eta] = [1]$ dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. La commutativité du carré de droite donne alors que $[k] = [k']$ dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Donc puisque $1 \leq k, k' \leq p-1$, on en déduit que $k = k'$.

On a donc bien p classes d'équivalence d'extensions de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ par $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, représentées par σ et les ξ_i définies ci-dessus.