Algèbre homologique et topologie algébrique (Cours: M.Livernet, TD: C.Gille) 2016-2017
Université Paris Diderot – M2 de Mathématiques fondamentales

Séances de TD n°5 et 6

14 et 21 octobre 2016

Cohomologie des groupes. Topologie algébrique.

1 Cohomologie des groupes

Exercice 1: (Foncteur Tor–Objets simpliciaux)

Soit R un anneau, $A \in \mathrm{Mod_R}$ et $B \in {}_{\mathrm{R}}\mathrm{Mod}$. On se propose de construire une résolution de B comme R-module à gauche.

Notons $\mathcal{B}_n(A,R,B) = A \otimes_{\mathbb{Z}} R^{\otimes n} \otimes_{\mathbb{Z}} B$ où $R^{\otimes n}$ correspond à tensoriser R n fois au-dessus de $\mathbb{Z}$. On note de la même manière le produit dans R et l'action à droite (gauche) de R sur A (sur B).

Pour $r_0 \in A, r_i \in R, 1 \leqslant i \leqslant n$ et $r_{n+1} \in B$, pour $0 \leqslant i,j \leqslant n$ on pose

$$\begin{aligned} d_i(r_0 \otimes r_1 \otimes \ldots \otimes r_n \otimes r_{n+1}) &= r_0 \otimes \ldots \otimes r_i \cdot r_{i+1} \otimes \ldots \otimes r_{n+1} \\ s_j(r_0 \otimes r_1 \otimes \ldots \otimes r_n \otimes r_{n+1}) &= r_0 \otimes \ldots \otimes r_j \otimes 1_R \otimes r_{j+1} \otimes \ldots \otimes r_{n+1} \end{aligned}$$

1) Montrer que $\mathcal{B}_*(A,R,B)$ est un groupe abélien simplicial. On considère le complexe associé à ce groupe simplicial que l'on note de la même manière.

a) Montrer que $H_0(\mathcal{B}_*(A,R,B)) = A \otimes_R B$.

b) Montrer que $\mathcal{B}_*(R,R,B)$ est un R-module à gauche et que $\mathcal{B}_*(A,R,B) = A \otimes_R \mathcal{B}_*(R,R,B)$.

c) Montrer que $H_n(\mathcal{B}_*(R,R,B)) = 0, \forall n > 0$. Que vaut $H_0(R,R,B)$?

d) Donner un exemple où $\mathcal{B}_0(R,R,B)$ n'est pas un R-module projectif.

2) On suppose que les groupes sous-jacents à l'anneau R et au R-module B sont des $\mathbb{Z}$-modules libres. Montrer que $\mathcal{B}_*(R,R,B)$ est une résolution libre du R-module B.

3) En déduire que $\mathrm{Tor}_n(A,B) = H_n(\mathcal{B}(A,R,B))$.

4) Faire le lien avec l'homologie des groupes.

Exercice 2: (cf poly Bichon-Taillefer)

Soit G un groupe et M un G-module.

1) Montrer que si G est fini d'ordre m, alors $mH^n(G,M) = 0, \forall n \geqslant 0$.

2) En déduire que si G est un groupe fini et M un $\mathbb{Z}[G]$-module de type fini, alors $H^n(G,M)$ est fini pour tout $n > 0$.

Exercice 3: (Premiers groupes de cohomologie)

`L'idée ici est de retrouver des résultats du cours avec d'autres méthodes: Référence Hilton-Stammbach, p192.`

Soit G un groupe, on note IG l'idéal d'augmentation c'est-à-dire le noyau de l'augmentation $\mathbb{Z}[G] \to \mathbb{Z}$, de telle manière que l'on a une suite exacte courte de G-modules

$$(\star)\ 0 \to IG \to \mathbb{Z}[G] \to \mathbb{Z} \to 0$$

1) Soit M un G-module à gauche. On définit $M^G = \{m \in M \mid \forall g \in G, g \cdot m = m\}$ et $M_G = M/\{(e_G - g) \cdot m, m \in M, g \in G\}$. Montrer que $H^0(G, M) = M^G$ et $H_0(G, M) = M_G$.

2) On se propose de calculer $H_1(G, \mathbb{Z})$.

a) Montrer que IG est un groupe libre engendré par $\{g - e_G, g \in G \setminus \{e_G\}\}$.

b) Montrer que pour tout G-module B l'on a une suite exacte courte

$$0 \to H_1(G, B) \to IG \otimes_G B \xrightarrow{\alpha} \mathbb{Z}[G] \otimes_G B \to H_0(G, B) \to 0$$

c) Montrer que si B est un G-module trivial alors $\alpha = 0$.

d) Identifier $H_1(G, \mathbb{Z})$ avec l'abélianisé du groupe G.

3) En utilisant la suite exacte courte $(\star)$ retrouver que $H^1(G, A) = \mathrm{Der}(G, A)/\mathrm{Ider}(G, A)$.

Exercice 4: (Cohomologie des groupes cycliques)

Soit $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{\omega^i, 0 \leqslant i \leqslant n-1\}$.
Dans $\mathbb{Z}[G]$ on considère les éléments $T = \sum_{i=0}^{n-1} \omega^i$ et $N = \omega - 1$.

1) Montrer que le complexe

$$\ldots \to \mathbb{Z}[G] \xrightarrow{\times T} \mathbb{Z}[G] \xrightarrow{\times N} \ldots \to \mathbb{Z}[G] \xrightarrow{\times T} \mathbb{Z}[G] \xrightarrow{\times N} \mathbb{Z}[G]$$

donne une résolution libre de $\mathbb{Z}$ comme $\mathbb{Z}[G]$-module trivial.

2) En déduire le calcul de $H_n(G, \mathbb{Z})$ et $H^n(G, \mathbb{Z})$ pour $n \geqslant 0$.

3) En déduire le calcul de $H_*(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$ et $H^*(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$.

2 Topologie algébrique

Exercice 5: (Rappels sur les espaces projectifs)

L'espace projectif réel $\mathbb{R}P^n$ est l'espace de toutes les droites passant par l'origine dans $\mathbb{R}^{n+1}$. Autrement dit c'est l'espace des orbites sous l'action de groupe $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ donnée par $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$, que l'on note:

$$\mathbb{R}P^n = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}/\mathbb{R}^*.$$

Par la suite, l'image d'un point $x = (x_1, \ldots, x_{n+1})$ de $\mathbb{R}^{n+1}$ par la projection $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}P^n$ sera notée $[x_1 : \ldots : x_{n+1}]$ et est appelée coordonnée homogène de x.

a) Montrez que $\mathbb{R}P^n$ est homéomorphe à $S^n/(x \sim -x)$.

b)Décrivez $\mathbb{R}P^0, \mathbb{R}P^1, \mathbb{R}P^2$.

c) Montrer que $\mathbb{R}P^n$ est homéomorphe à $\mathbb{R}P^{n-1}$ auquel on a attaché D^n le long de sa frontière S^{n-1} via la projection $S^{n-1} \to S^{n-1}/(x \sim -x)$.

d) L'espace projectif complexe $\mathbb{C}P^n$ est défini de même:

$$\mathbb{C}P^n = \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}/\mathbb{C}$$

Montrer qu'il est homéomorphe à S^{2n+1}/S^1 puis à CP^{n-1} auquel on a attaché D^{2n} le long de sa frontière S^{2n-1} via la projection $S^{2n-1} \to S^{2n-1}/S^1$ appelée *application de Hopf*. Décrivez $\mathbb{C}P^0$ et $\mathbb{C}P^1$.

Exercice 6: (Espaces projectifs réels)

A l'aide de l'homologie cellulaire calculer l'homologie de $\mathbb{R}P^n/\mathbb{R}P^m$ pour $m < n$.

Exercice 7: (Bouteille de Klein)

Calculer l'homologie cellulaire de la bouteille de Klein, puis sa cohomologie à coefficients dans $\mathbb{Z}$ et dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Exercice 8: (Complexe singulier d'un convexe)

Soit K un convexe d'un espace eucidien et $w \in K$. Soit $\Delta^n =< e_0, \ldots, e_n >$. On considère l'application $\delta_0 : \Delta^n \to \Delta^{n+1}$ qui à e_i associe e_{i+1}.

1) Montrer que tout élément de Δ^{n+1} s'écrit de manière unique $te_0 + (1-t)\delta_0 v$, avec $t \in [0,1]$ et $v \in \Delta^n$.

2) En déduire que $\widetilde{C}(K)$ est contractile (on pourra considérer l'homotopie $D : C_n K \to C_{n+1}(K)$ qui à σ associe $D(\sigma) : te_0 + (1-t)\delta_0(v) \mapsto tw + (1-t)\sigma(v)$).

Exercice 9: (Suites exactes longues associées à des triplets)

Montrer qu'il existe une longue suite exacte

$$\ldots \to H_n(B,A) \to H_n(X,A) \to H_n(X,B) \to H_{n-1}(B,A) \to \ldots$$

pour tous triples $A \subset B \subset X$. Décrire le morphisme $H_n(X,B) \to H_{n-1}(B,A)$ à l'aide du morphisme de connexion dans la longue suite exacte associée à la paire (X,B). Montrer que si B est un rétract de X alors $H_*(X,A) = H_*(X,B) \oplus H_*(B,A)$.

Exercice 10: (Calcul d'homologie)

Calculez les groupes d'homologie $H_n(X, A)$ quand $X = S^2$ ou $S^1 \times S^1$ et A est un ensemble fini de points de X.

Exercice 11: (n-torsion)

De la suite exacte courte de groupes abéliens

$$0 \longrightarrow C_i(X;\mathbb{Z}) \xrightarrow{\times n} C_i(X;\mathbb{Z}) \longrightarrow C_i(X;\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \longrightarrow 0$$

déduire une suite exacte courte

$$0 \longrightarrow H_i(X;\mathbb{Z})/nH_i(X;\mathbb{Z}) \longrightarrow H_i(X;\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \longrightarrow n - \mathrm{Tor}(H_{i-1}(X;\mathbb{Z})) \longrightarrow 0$$

où $n - \mathrm{Tor}(G)$ est la noyau de l'application $G \xrightarrow{\times n} G$;

En déduire que $\tilde{H}i(X, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) = 0$ pour tout i et tout nombre premier p si et seulement si $\tilde{H}_i(X;\mathbb{Z})$ est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel pour tout i.

Exercice 12: (Suites exactes longues de cohomologie)

Montrer que la longue suite exacte associée à la paire $(I \times Y, \partial I \times Y)$ se casse en des suites exactes courtes scindées

$$0 \to H^n(I \times Y; R) \to H^n(\partial I \times Y; R) \to H^{n+1}(I \times Y, \partial I \times Y; R) \to 0.$$

Exercice 13: (Magma)

Le but de l'exercice est de montrer qu'il n'y a pas de structure de magma unitaire topologique sur S^n si $n > 0$ est pair. Supposons par l'absurde qu'une telle structure existe: il existe une application continue $\mu : S^n \times S^n \to S^n$ et une unité $e \in S^n$ telles que $\mu(x, e) = x = \mu(e, x)$.

1) Soit $e_l, e_r : S^n \to S^n \times S^n$ définies par $e_l(x) = (e, x)$ et $e_r(x) = (x, e)$. Décrire $H^n(e_l;\mathbb{Z})$ et $H^n(e_r;\mathbb{Z})$. En déduire la description de $H^n(\mu, \mathbb{Z})$

2) En utilisant les cup produits, trouver une contradiction.

Exercice 14: (Distinction de $S^p \times S^q$ et $S^p \vee S^q \vee S^{p+q}$ par le cup produit)

Pour tout entier naturel a on notera $\mathbb{Z}(a)$ le $\mathbb{Z}$-module gradué égal à $\mathbb{Z}$ en degré a et nul dans les autres degrés.

1) Montrer que $H_*(S^p \times S^q) \simeq \mathbb{Z}(0) \oplus \mathbb{Z}(p) \oplus \mathbb{Z}(q) \oplus \mathbb{Z}(p+q)$.
Déterminer également $H^*(S^p \times S^q)$.

2) Calculer $H_*(S^p \vee S^q \vee S^{p+q})$ et $H^*(S^p \vee S^q \vee S^{p+q})$ et en déduire que $S^p \times S^q$ et $S^p \vee S^q \vee S^{p+q}$ ont mêmes groupes d'homologie et de cohomologie.

3) Déterminer le cup produit sur $H_*(S^p \times S^q)$.

4) Déterminer le cup produit sur $H_*(S^p \vee S^q \vee S^{p+q})$. Conclure.