Algèbre homologique et topologie algébrique (Cours: M.Livernet, TD: C.Gille) 2017-2018
Université Paris Diderot – M2 de Mathématiques fondamentales

Séances de TD n°5 et 6

13 et 20 octobre 2017

Cohomologie des groupes. Topologie algébrique.

1 Cohomologie des groupes

Exercice 1:

Soit G un groupe et M un G-module.

1) Montrer que si G est fini d'ordre m, alors $mH^n(G,M) = 0, \forall n \geqslant 0$.

2) En déduire que si G est un groupe fini et M un $\mathbb{Z}[G]$-module de type fini, alors $H^n(G,M)$ est fini pour tout $n > 0$.

Exercice 2: (Cohomologie des groupes cycliques)

Soit $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{\omega^i, 0 \leqslant i \leqslant n-1\}$.
Dans $\mathbb{Z}[G]$ on considère les éléments $T = \sum_{i=0}^{n-1} \omega^i$ et $N = \omega - 1$.

1) Montrer que le complexe

$$\ldots \to \mathbb{Z}[G] \overset{\times T}{\to} \mathbb{Z}[G] \overset{\times N}{\to} \ldots \to \mathbb{Z}[G] \overset{\times T}{\to} \mathbb{Z}[G] \overset{\times N}{\to} \mathbb{Z}[G]$$

donne une résolution libre de $\mathbb{Z}$ comme $\mathbb{Z}[G]$-module trivial.

2) En déduire le calcul de $H_n(G,\mathbb{Z})$ et $H^n(G,\mathbb{Z})$ pour $n \geqslant 0$.

3) En déduire le calcul de $H_*(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$ et $H^*(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$.

Exercice 3: (Premiers groupes de cohomologie)

Soit G un groupe, on note IG l'idéal d'augmentation c'est-à-dire le noyau de l'augmentation $\mathbb{Z}[G] \to \mathbb{Z}$, de telle manière que l'on a une suite exacte courte de G-modules

$$(\star)\ 0 \to IG \to \mathbb{Z}[G] \to \mathbb{Z} \to 0$$

1) Soit M un G-module à gauche. On définit $M^G = \{m \in M \mid \forall g \in G, g \cdot m = m\}$ et $M_G = M/\{(e_G - g) \cdot m, m \in M, g \in G\}$. Montrer que $H^0(G,M) = M^G$ et $H_0(G,M) = M_G$.

2) On se propose de calculer $H_1(G,\mathbb{Z})$.
a) Montrer que IG est un groupe libre engendré par $\{g - e_G, g \in G \setminus \{e_G\}\}$.
b) Montrer que pour tout G-module B l'on a une suite exacte courte

$$0 \to H_1(G,B) \to IG \otimes_G B \overset{\alpha}{\to} \mathbb{Z}[G] \otimes_G B \to H_0(G,B) \to 0$$

c) Montrer que si B est un G-module trivial alors $\alpha = 0$.
d) Identifier $H_1(G,\mathbb{Z})$ avec l'abélianisé du groupe G.

3) En utilisant la suite exacte courte $(\star)$ retrouver que $H^1(G,A) = \mathrm{Der}(G,A)/\,\mathrm{Ider}(G,A)$.

2 Topologie algébrique

Exercice 4: (Rappels sur les espaces projectifs)

L'espace projectif réel $\mathbb{R}P^n$ est l'espace de toutes les droites passant par l'origine dans $\mathbb{R}^{n+1}$. Autrement dit c'est l'espace des orbites sous l'action de groupe $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ donnée par $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$, que l'on note:

$$\mathbb{R}P^n = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}/\mathbb{R}^*.$$

Par la suite, l'image d'un point $x = (x_1, \ldots, x_{n+1})$ de $\mathbb{R}^{n+1}$ par la projection $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}P^n$ sera notée $[x_1 : \ldots : x_{n+1}]$ et est appelée coordonnée homogène de x.

a) Montrez que $\mathbb{R}P^n$ est homéomorphe à $S^n/(x \sim -x)$.

b) Décrivez $\mathbb{R}P^0, \mathbb{R}P^1, \mathbb{R}P^2$.

c) Montrer que $\mathbb{R}P^n$ est homéomorphe à $\mathbb{R}P^{n-1}$ auquel on a attaché D^n le long de sa frontière S^{n-1} via la projection $S^{n-1} \to S^{n-1}/(x \sim -x)$.

d) L'espace projectif complexe $\mathbb{C}P^n$ est défini de même:

$$\mathbb{C}P^n = \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}/\mathbb{C}$$

Montrer qu'il est homéomorphe à S^{2n+1}/S^1 puis à CP^{n-1} auquel on a attaché D^{2n} le long de sa frontière S^{2n-1} via la projection $S^{2n-1} \to S^{2n-1}/S^1$ appelée *application de Hopf*. Décrivez $\mathbb{C}P^0$ et $\mathbb{C}P^1$.

Exercice 5: (Espaces projectifs réels)

A l'aide de l'homologie cellulaire calculer l'homologie de $\mathbb{R}P^n/\mathbb{R}P^m$ pour $m < n$.

Exercice 6: (Bouteille de Klein)

La bouteille de Klein est un carré dont les cotés horizontaux sont identifiés dans la même direction et les côtés verticaux sont identifiés dans la direction opposée. Calculer l'homologie cellulaire de la bouteille de Klein, puis sa cohomologie à coefficients dans $\mathbb{Z}$ et dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Exercice 7: (n-torsion)

De la suite exacte courte de groupes abéliens

$$0 \longrightarrow C_i(X;\mathbb{Z}) \xrightarrow{\times n} C_i(X;\mathbb{Z}) \longrightarrow C_i(X;\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \longrightarrow 0$$

déduire une suite exacte courte

$$0 \longrightarrow H_i(X;\mathbb{Z})/nH_i(X;\mathbb{Z}) \longrightarrow H_i(X;\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \longrightarrow n - \mathrm{Tor}(H_{i-1}(X;\mathbb{Z})) \longrightarrow 0$$

où $n - \mathrm{Tor}(G)$ est la noyau de l'application $G \xrightarrow{\times n} G$;

En déduire que $\tilde{H}_i(X, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) = 0$ pour tout i et tout nombre premier p si et seulement si $\tilde{H}_i(X;\mathbb{Z})$ est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel pour tout i.

Exercice 8: (Suites exactes longues de cohomologie)

Montrer que la longue suite exacte associée à la paire $(I \times Y, \partial I \times Y)$ se casse en des suites exactes courtes scindées

$$0 \to H^n(I \times Y; R) \to H^n(\partial I \times Y; R) \to H^{n+1}(I \times Y, \partial I \times Y; R) \to 0.$$

Exercice 9: (Distinction de $S^p \times S^q$ et $S^p \vee S^q \vee S^{p+q}$ par le cup produit)

Pour tout entier naturel a on notera $\mathbb{Z}(a)$ le $\mathbb{Z}$-module gradué égal à $\mathbb{Z}$ en degré a et nul dans les autres degrés.

1) Montrer que $H_*(S^p \times S^q) \simeq \mathbb{Z}(0) \oplus \mathbb{Z}(p) \oplus \mathbb{Z}(q) \oplus \mathbb{Z}(p+q)$.
Déterminer également $H^*(S^p \times S^q)$.

2) Calculer $H_*(S^p \vee S^q \vee S^{p+q})$ et $H^*(S^p \vee S^q \vee S^{p+q})$ et en déduire que $S^p \times S^q$ et $S^p \vee S^q \vee S^{p+q}$ ont mêmes groupes d'homologie et de cohomologie.

3) Déterminer le cup produit sur $H_*(S^p \times S^q)$.

4) Déterminer le cup produit sur $H_*(S^p \vee S^q \vee S^{p+q})$. Conclure.

Exercice 10: (Extrait de l'examen du 4 novembre 2016)

Soit X un espace topologique. Soit p un nombre premier. Notons que la suite exacte courte

$$0 \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \xrightarrow{\times p} \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \to 0,$$

où $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est la projection canonique, induit une suite exacte longue en cohomologie singulière

$$\ldots \to H^n(X, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \to H^n(X, \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}) \to H^n(X, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \to H^{n+1}(X, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \to \ldots$$

1. Décrire l'opérateur cobord dans la longue suite exacte $\beta : H^n(X, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \to H^{n+1}(X, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$.

2. Montrer que $\beta(x \cup y) = \beta(x) \cup y + (-1)^{|x|} x \cup \beta(y)$.

3. On suppose $p = 2$. Montrer que pour $x \in H^1(X, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ on a $\beta(x) = x \cup x$.

4. En déduire la structure d'anneau de $H^*(\mathbb{R}P^2, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$