TD 5

Arthur Garnier

20 octobre 2017

Exercice 1 :

1) Supposons G fini d'ordre m. On rappelle qu'on a la résolution bar

$$\cdots \longrightarrow \mathbb{Z}[G^{\times(n+1)}] \xrightarrow{d_n} \mathbb{Z}[G^{\times n}] \xrightarrow{d_{n-1}} \cdots \xrightarrow{d_2} \mathbb{Z}[G\times G] \xrightarrow{d_1} \mathbb{Z}[G]$$

munie de l'augmentation $\varepsilon : \mathbb{Z}[G] \to \mathbb{Z}$ qui en fait une résolution libre du $\mathbb{Z}[G]$-module (trivial) $\mathbb{Z}$. La différentielle d_n est donnée par

$$d_n : \mathbb{Z}[G^{\times(n+1)}] \to \mathbb{Z}[G^{\times n}]$$

avec

$$d_n(a_0,\dots,a_n) = \sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i(a_0,\dots,a_ia_{i+1},\dots,a_n) + (-1)^n(a_0,\dots,a_{n-1})$$

Soit donc $[f] \in H^n(G,M)$. En utilisant la résolution bar, on obtient que

$$H^n(G,M) = \ker(\mathrm{Hom}_G(d_{n+1},M)) \Big/ \mathrm{im}\,(\mathrm{Hom}_G(d_n,M)),$$

si bien que $[f]$ est représenté par un $f \in \mathrm{Hom}_G(\mathbb{Z}[G^{\times(n+1)}],M)$ tel que $f\circ d_{n+1} = 0$. Cette condition s'écrit

$$0 = f(d_{n+1}(a_0,\dots,a_{n+1})) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i f(a_0,\dots,a_ia_{i+1},\dots,a_{n+1}) + (-1)^{n+1}f(a_0,\dots,a_n),$$

se qui se traduit par

$$f(a_0,\dots,a_n) = \sum_{i=0}^{n-1}(-1)^{i+n} f(a_0,\dots,a_ia_{i+1},\dots,a_{n+1}) + f(a_0,\dots,a_na_{n+1}).$$

En sommant ceci sur $a_{n+1}\in G$, il vient alors

$$mf(a_0,\dots,a_n) = \sum_{a_{n+1}\in G}\sum_{0\le i\le n-1}(-1)^{i+n}f(a_0,\dots,a_ia_{i+1},\dots,a_{n+1}) + \sum_{a_{n+1}\in G} f(a_0,\dots,a_na_{n+1})$$

$$= \sum_{g\in G}\sum_{0\le i\le n-1}(-1)^{i+n}f(a_0,\dots,a_ia_{i+1},\dots,g) + \sum_{g\in G} f(a_0,\dots,g).$$

Posons alors

$$\begin{array}{cccc} \sigma & : & \mathbb{Z}[G^{\times n}] & \to & M \\ & & (a_0,\dots,a_{n-1}) & \mapsto & \sum_{g\in G}(-1)^n f(a_0,\dots,a_{n-1},g) \end{array}$$

Alors, $\sigma \in \mathrm{Hom}_G(\mathbb{Z}[G^{\times n}],M)$ et on a

$$\sigma(d_n(a_0,\dots,a_n)) = \sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i\sigma(a_0,\dots,a_ia_{i+1},\dots,a_n) + (-1)^n\sigma(a_0,\dots,a_{n-1})$$

$$= \sum_{g\in G}\sum_{0\le i\le n-1}(-1)^{i+n}f(a_0,\dots,a_ia_{i+1},\dots,g) + \sum_{g\in G} f(a_0,\dots,g) = mf(a_0,\dots,a_n),$$

donc $\sigma\circ d_n = mf$ et donc $mf \in \mathrm{im}\,(\mathrm{Hom}_G(d_n,M))$, ce qui signifie que $m[f]=0$ dans $H^n(G,M)$. Ceci étant vrai pour tout $[f]\in H^n(G,M)$, on en déduit que $mH^n(G,M) = 0$, pour tout $n \geq 0$.

2) Considérons le complexe de cochaînes

$$X^n := \mathrm{Hom}_G(\mathbb{Z}[G^{\times(n+1)}], M)),$$

obtenu en appliquant $\mathrm{Hom}_G(-, M)$ à la résolution bar. La cohomologie de ce complexe est par définition la cohomologie $H^*(G, M)$ de G à coefficients dans M. On a

$$\forall n \geq 0,\ X^n = \mathrm{Hom}_G(\mathbb{Z}[G^{\times(n+1)}], M) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{S}et}(G^{\times n}, M).$$

Or, comme $G^{\times n}$ est fini et que M est de type fini, ce dernier groupe abélien est de type fini. Ainsi, tous les X^n sont des groupes abéliens de type fini, donc il en va de même des $H^n(G, M)$, car ce sont des quotients de sous-groupes de X^n. Or, d'après la question 1), les $H^n(G, M)$ sont de torsion si G est fini ; ce sont donc des groupes abéliens de type fini et de torsion : ils sont finis.

Exercice 2 :

1) Notons tout d'abord que l'on a

$$\varepsilon(Ng) = \varepsilon((\omega - 1)g) = 0,$$

et que $NT = TN = 0$, de sorte que

$$\cdots \xrightarrow{\times N} \mathbb{Z}[G] \xrightarrow{\times T} \mathbb{Z}[G] \longrightarrow \cdots \longrightarrow \mathbb{Z}[G] \xrightarrow{\times T} \mathbb{Z}[G] \xrightarrow{\times N} \mathbb{Z}[G] \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

est un complexe. De plus, chaque $\mathbb{Z}[G]$ est un $\mathbb{Z}[G]$-module libre, donc il nous reste à montrer que ce complexe est exact. Soit $x \in \ker(\varepsilon)$. En écrivant $x = \sum_{g\in G} x_g g = \sum_{i=0}^{n-1} x_i \omega^i$, on a $0 = \varepsilon(x) = \sum_{0\leq i\leq n-1} x_i$. Par ailleurs, si $x \in \mathbb{Z}[G]$, on a

$$Tx = \sum_{i=0}^{n-1} \omega^i \sum_{j=0}^{n-1} x_j \omega^j = \sum_{0\leq i,j\leq n-1} x_j \omega^{i+j}$$

$$= \sum_{u=0}^{n-1} \left(\sum_{i=0}^{n-1} x_i \right) \omega^u = \left(\sum_{i=0}^{n-1} x_i \right) T,$$

donc on a $x \in \ker(\times T)$ (resp. $x \in \ker(\varepsilon)$) si et seulement si $\sum_{i=0}^{n-1} x_i = 0$. Or, dans ce cas on a (en posant $x_n := x_0$)

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i(\omega^i - 1),$$

et comme $\mathbb{Z}[G]$ est commutatif (puisque G l'est), on peut écrire

$$\forall 1 \leq i \leq n,\ \omega^i - 1 = (\omega - 1) \sum_{j=0}^{i-1} \omega^j = N \sum_{j=0}^{i-1} \omega^j,$$

et donc

$$x = N \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=0}^{i-1} x_i \omega^j = Ny \text{ où } y := \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=0}^{i-1} x_i \omega^j.$$

Ceci montre que $\ker(\times T) = \mathrm{im}\,(\times N)$ et que $\ker(\varepsilon) = \mathrm{im}\,(\times N)$. Enfin, si $x \in \ker(\times N)$, on a

$$0 = Nx = \sum_{i=0}^{n-1} x_i(\omega - 1)\omega^i = \sum_{i=0}^{n-1} x_i \omega^{i+1} - \sum_{i=0}^{n-1} x_i \omega^i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_{i-1}\omega^i - \sum_{i=0}^{n-1} x_k \omega^i = x_{n-1} - x_0 + \sum_{i=1}^{n-1} (x_{i-1} - x_i)\omega^i,$$

donc pour tout $0 \leq i \leq n-1$, $x_i = x_0$ et $x = x_0 \sum_{i=0}^{n-1} \omega^i = x_0 T$ donc $x \in \mathrm{im}\,(\times T)$, d'où $\ker(\times N) = \mathrm{im}\,(\times T)$. On a donc montré que notre complexe est exact et c'est donc bien une résolution libre du $\mathbb{Z}[G]$-modules trivial $\mathbb{Z}$.

2) Calculons $H_*(G, \mathbb{Z})$. On applique $- \otimes_{\mathbb{Z}[G]} \mathbb{Z}$ à la résolution libre de la question 1) pour obtenir un complexe de chaînes

$$\cdots \xrightarrow{T\otimes 1} \mathbb{Z}[G] \otimes_G \mathbb{Z} \xrightarrow{N\otimes 1} \mathbb{Z}[G] \otimes_G \mathbb{Z} \xrightarrow{T\otimes 1} \mathbb{Z}[G] \otimes_G \mathbb{Z} \xrightarrow{N\otimes 1} \mathbb{Z}[G] \otimes_G \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

Or, par l'identification $\mathbb{Z}[G] \otimes_{\mathbb{Z}[G]} \mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}$ (qui envoie $x \otimes a$ sur a), ce complexe devient, en remarquant que l'action de $N \otimes 1$ sur $\mathbb{Z}$ est nulle et que celle de $T \otimes 1$ est la multiplication par n,

$$\cdots \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{\times n} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{\times n} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \longrightarrow 0\,.$$

On prend alors l'homologie de ce complexe pour en déduire directement que

$$H_k(G, \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si} \quad k = 0 \\ \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} & \text{si} \quad k \text{ impair} \\ 0 & \text{si} \quad k \text{ pair} \end{cases}$$

De même, pour calculer $H^*(G, \mathbb{Z})$, on applique $\mathrm{Hom}_G(-, \mathbb{Z})$ à la résolution libre ci-dessus et en remarquant que $\mathrm{Hom}_G(\mathbb{Z}[G], \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$, le complexe de cochaînes

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_G(\mathbb{Z}[G], \mathbb{Z}) \xrightarrow{-\circ N} \mathrm{Hom}_G(\mathbb{Z}[G], \mathbb{Z}) \xrightarrow{-\circ T} \mathrm{Hom}_G(\mathbb{Z}[G], \mathbb{Z}) \longrightarrow \cdots$$

devient

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{\times n} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z}\mathbb{Z} \xrightarrow{\times n} \cdots$$

et on en tire

$$H^k(G, \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si} \quad k = 0 \\ 0 & \text{si} \quad k \text{ impair} \\ \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} & \text{si} \quad k \text{ pair} \end{cases}$$

Exercice 3 :

1) En appliquant le foncteur exact à droite $-\otimes_{\mathbb{Z}[G]} M$ à la suite exacte courte $(*)$ de l'énoncé, on obtient une suite exacte

$$IG \otimes_G M \longrightarrow \mathbb{Z}[G] \otimes_G M \longrightarrow \mathbb{Z} \otimes_G M \longrightarrow 0$$

qui se réécrit

$$IG \cdot M \longrightarrow M \longrightarrow H_0(G, M) \longrightarrow 0$$

de telle sorte que

$$H_0(G, M) \simeq M \big/ (IG \cdot M)$$

et ce dernier groupe abélien est isomorphe à M_G d'après la question 2) a) ci-dessous, puisque

$$IG \cdot M = \{xm,\ x \in IG,\ m \in M\} = <(g-1)m,\ g \in G,\ m \in M> .$$

Ensuite, on a

$$H^0(G, M) = \operatorname{Hom}_G(\mathbb{Z}, M),$$

car le foncteur $\operatorname{Hom}_G(\mathbb{Z}, -)$ est exact à gauche. On peut définir des morphismes de groupes abéliens

$$\begin{array}{cccc} \varphi & : & M^G & \to & \operatorname{Hom}_G(\mathbb{Z}, M) \\ & & m & \mapsto & (1 \mapsto m) \end{array}$$

et

$$\begin{array}{cccc} \psi & : & \operatorname{Hom}_G(\mathbb{Z}, M) & \to & M^G \\ & & f & \mapsto & f(1) \end{array}$$

Ces morphismes sont bien définis. En effet, si $m \in M^G$, soit $f_m : \mathbb{Z} \to M$ qui envoie k sur km. C'est un morphisme de G-modules car $f_m(gk) = f_m(k) = km = g(km)$ car $m \in M^G$. De plus, si $f \in \operatorname{Hom}_G(\mathbb{Z}, M)$, alors $gf(1) = f(g) = f(g \cdot 1) = f(1)$ donc $f(1) \in M^G$. Maintenant, il est clair que $\varphi \circ \psi = id_{\operatorname{Hom}_G(\mathbb{Z},M)}$ et que $\psi \circ \varphi = id_{M^G}$, donc que φ est un isomorphisme et donc que

$$H^0(G, M) = \operatorname{Hom}_G(\mathbb{Z}, M) \simeq M^G.$$

2) a) Posons

$$\mathcal{B}_G := \{g - e_G,\ g \in G \setminus \{1\}\} = \{g - 1,\ g \in G \setminus \{1\}\} \subset IG.$$

Comme $\mathbb{Z}[G]$ est construit comme le groupe abélien libre sur l'ensemble sous-jacent de G, la famille $\mathcal{B}_G$ est une famille libre de IG ; il reste à montrer qu'elle engendre IG. Soit donc $x = \sum_{g \in G} x_g g \in \mathbb{Z}[G]$. Si $x \in IG$, alors $\sum_g x_g = 0$ et alors

$$x = x - \left(\sum_{g \in G} x_g\right) \cdot 1 = \sum_{g \in G} x_g(g-1) = \sum_{g \in G \setminus \{1\}} x_g(g-1),$$

d'où le résultat.

b) Le foncteur $-\otimes_G B$ étant exact à droite, l'appliquer à la suite exacte courte $(*)$ de l'énoncé donne une suite exacte longue

$$\cdots \longrightarrow \operatorname{Tor}_1^G(\mathbb{Z}[G], B) \longrightarrow \operatorname{Tor}_1^G(\mathbb{Z}, B) \longrightarrow IG \otimes_G B \xrightarrow{\alpha} \mathbb{Z}[G] \otimes_G B \longrightarrow \mathbb{Z} \otimes_G B \longrightarrow 0$$

qui se réécrit

$$\cdots \longrightarrow \operatorname{Tor}_1^G(\mathbb{Z}[G], B) \longrightarrow H_1(G, B) \longrightarrow IG \otimes_G B \xrightarrow{\alpha} \mathbb{Z}[G] \otimes_G B \longrightarrow H_0(G, B) \longrightarrow 0$$

c) Supposons que B soit un G-module trivial. Si $g \in G$ et $x \in B$, on a

$$\alpha((g-1)\otimes x) = (g-1)\otimes x = g\otimes x - 1\otimes x = 1\otimes gx - 1\otimes x = 1\otimes x - 1\otimes x = 0$$

et comme IG est engendré par $\mathcal{B}_G$, on en tire que $\alpha(y\otimes x) = 0$ pour tout $y \in IG$ et tout $x \in B$, donc que $\alpha(z) = 0$ pour tout $z \in IG \otimes_G B$ et donc que $\alpha = 0$.

d) On peut ici appliquer la question 2) b) à $B = \mathbb{Z}$ qui est un G-module trivial pour obtenir que $\alpha = 0$ et donc qu'on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow H_1(G, \mathbb{Z}) \longrightarrow IG \otimes_G \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z}[G] \otimes_G \mathbb{Z} \longrightarrow H_0(G, \mathbb{Z}) \longrightarrow 0\,.$$

On a ainsi un isomorphisme de groupes abéliens

$$H_1(G, \mathbb{Z}) \simeq IG \otimes_G \mathbb{Z} \overset{\text{def}}{=} H_0(G, IG).$$

En appliquant ensuite la question 2) b) au G-module $B = IG$, on obtient une suite exacte

$$0 \longrightarrow H_1(G, IG) \longrightarrow IG \otimes_G IG \xrightarrow{\alpha} \mathbb{Z}[G] \otimes_G IG \longrightarrow H_0(G, IG) \longrightarrow 0$$

qui se réécrit

$$0 \longrightarrow H_1(G, IG) \longrightarrow IG \otimes_G IG \xrightarrow{\alpha} IG \longrightarrow H_0(G, IG) \longrightarrow 0$$

et donc

$$H_1(G, \mathbb{Z}) = H_0(G, IG) = \operatorname{im}(\alpha) = {IG}/{\ker\alpha} = {IG}/{IG^2}.$$

Posons ensuite

$$\begin{array}{rcccc} \widetilde{\alpha} & : & G & \to & {IG}/{IG^2} \\ & & g & \mapsto & [g-1] \end{array}$$

Alors, on a, pour tous $g, h \in G$,

$$\widetilde{\alpha}(gh) = [gh-1] = [(g-1)(h-1)+(g-1)+(h-1)] = [g-1]+[h-1] = \widetilde{\alpha}(g)+\widetilde{\alpha}(h),$$

car $(g-1)(h-1) \in IG^2$ et donc $\widetilde{\alpha}$ est un morphisme de groupes et comme ${IG}/{IG^2}$ est abélien, ce morphisme se factorise par l'abélianisé

$$\begin{tikzcd} G \arrow[rr, "\widetilde{\alpha}"] \arrow[dr] & & {IG}/{IG^2} \\ & G^{ab} \arrow[ur, "\alpha"'] & \end{tikzcd}$$

Réciproquement, posons

$$\begin{array}{rcrcl}\widetilde{\beta} & : & IG & \to & G^{ab} \\ & & g-1 & \mapsto & [g]\end{array}$$

et observons que

$$\widetilde{\beta}((g-1)(h-1)) = \widetilde{\beta}((gh-1)+(g-1)+(h-1)) = [ghg^{-1}h^{-1}] = [1],$$

donc que $\widetilde{\beta}$ induit un morphisme $\beta : {}^{IG}/_{IG^2} \to G^{ab}$. On vérifie alors que α et β sont réciproques l'un de l'autre et donc que α est un isomorphisme. On a finalement

$$H_1(G,\mathbb{Z}) \simeq H_0(G,IG) \simeq {}^{IG}/_{IG^2} \simeq {}^{G}/_{G'} = G^{ab}.$$

3) Rappelons que

$$\mathrm{Der}(G,A) = \{f : G \to A\ ;\ f(gh) = gf(h) + f(g)\}$$

et

$$\mathrm{Ider}(G,A) = \{f : G \to A\ ;\ \exists m \in M\ ;\ f(g) = gm - m\}$$

On a également

$$H^n(G,A) = \mathrm{Ext}\,^n_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z},A) = R^n(\mathrm{Hom}\,_G(-,A))(\mathbb{Z})$$

et la suite exacte courte (1) induit une suite exacte longue en cohomologie

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}\,_G(\mathbb{Z},A) \arrow[r, "\alpha"] & \mathrm{Hom}\,_G(\mathbb{Z}[G],A) \arrow[r, "\beta"] & \mathrm{Hom}\,_G(IG,A) \arrow[r, "\gamma"] & \mathrm{Ext}\,^1_G(\mathbb{Z},A) \arrow[d] \\ & & & \cdots & \mathrm{Ext}\,^1_G(\mathbb{Z}[G],A) \arrow[l] \end{tikzcd}$$

mais comme $\mathbb{Z}[G]$ est un G-module projectif, le foncteur $\mathrm{Hom}\,_G(\mathbb{Z}[G],-)$ est exact, donc $\mathrm{Ext}\,_G(\mathbb{Z}[G],A) = 0$ et cette suite se réécrit

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}\,_G(\mathbb{Z},A) \arrow[r, "\alpha"] & \mathrm{Hom}\,_G(\mathbb{Z}[G],A) \arrow[r, "\beta"] & \mathrm{Hom}\,_G(IG,A) \arrow[r, "\gamma"] & H^1(G,A) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

d'où

$$H^1(G,A) = \mathrm{im}\,\gamma = {}^{\mathrm{Hom}\,_G(IG,A)}\Big/_{\ker(\gamma)} \simeq {}^{\mathrm{Hom}\,_G(IG,A)}\Big/_{\mathrm{im}\,(\beta)}.$$

Notons $\iota : IG \hookrightarrow \mathbb{Z}[G]$ l'inclusion. Si $f \in \mathrm{Hom}\,_G(IG,A)$, alors f est déterminée par les $f(g-1)$ pour $g \in G$. f induit une application

$$\begin{array}{rcrcl}\widetilde{f} & : & G & \to & A \\ & & g & \mapsto & f(g-1)\end{array}$$

et on a

$$\widetilde{f}(gh) = f(gh-1) = f(g(h-1)+(g-1)) = gf(h-1) + f(g-1) = g\widetilde{f}(h) + \widetilde{f}(g),$$

donc $\widetilde{f} \in \mathrm{Der}(G,A)$. De même, on voit qu'un élément de $\mathrm{Der}(G,A)$ induit un élément de $\mathrm{Hom}_G(IG,A)$, d'où un isomorphisme

$$\mathrm{Hom}_G(IG,A) \simeq \mathrm{Der}(G,A).$$

Par ailleurs, si $f \in \mathrm{Hom}_G(IG,A)$ est dans $\mathrm{im}\,\beta$, alors il existe $f' : \mathbb{Z}[G] \to A$ tel que $f = f' \circ \iota$. Soit

$$\begin{array}{rcccc} \varphi_f & : & G & \to & A \\ & & g & \mapsto & f(g-1) \end{array}$$

et posons $m := f'(1)$. Pour $g \in G$, on a

$$\varphi_f(g) = f(g-1) = f'(g-1) = f'(g) - f'(1) = gf'(1) - f'(1) = gm - m,$$

donc $\varphi_f \in \mathrm{Ider}(G,A)$ et de même, un élément de $\mathrm{Ider}(G,A)$ induit un unique élément de $\mathrm{im}\,(\beta)$, d'où un isomorphisme

$$\mathrm{im}\,(\beta) \simeq \mathrm{Ider}(G,A).$$

Finalement, on a bien

$$H^1(G,A) \simeq \mathrm{Hom}_G(IG,A) \Big/ \mathrm{im}\,(\beta) \simeq \mathrm{Der}(G,A) \Big/ \mathrm{Ider}(G,A),$$

d'où le résultat.