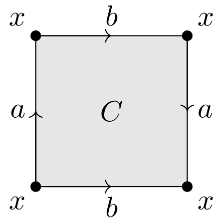
Solution de l'Exercice 6 (Bouteille de Klein) *proposée par Daniel Zimmer*

Notons K la bouteille de Klein. On se donne la décomposition cellulaire suivante sur K :



On a une 0-cellule x, deux 1-cellules a et b et une 2-cellule C. On en déduit que le complexe cellulaire associé à K est de la forme

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}C \xrightarrow{\partial_2} \mathbb{Z}a \oplus \mathbb{Z}b \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z}x \longrightarrow 0 \tag{$\star$}$$

On calcule aisément que

$$\partial_1(a) = \partial_1(b) = x - x = 0,$$

et donc la différentielle $\partial_1 : \mathbb{Z}a \oplus \mathbb{Z}b \longrightarrow \mathbb{Z}x$ est l'application nulle. De même on calcule

$$\partial_2(C) = a + b + a - b = 2a,$$

et donc on en déduit que $\ker \partial_2 = 0$ et $\operatorname{im} \partial_2 \cong 2\mathbb{Z} \oplus 0$. Finalement, on en conclut que

$$H_i(K) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } i = 0, \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \text{si } i = 1, \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

On peut à présent utiliser le théorème des coefficients universels pour calculer la cohomologie de K à coefficients dans $\mathbb{Z}$. Le théorème nous dit que pour tout $i \in \mathbb{Z}$, on a une suite exacte courte

$$0 \longrightarrow \operatorname{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(H_{i-1}(K), \mathbb{Z}) \longrightarrow H^i(K, \mathbb{Z}) \longrightarrow \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_i(K), \mathbb{Z}) \longrightarrow 0.$$

On en déduit que pour $i = 0$, comme $H_{-1}(K) = 0$, il suit que $\operatorname{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(H_{-1}(K), \mathbb{Z}) = 0$ et on a un isomorphisme

$$H^0(K, \mathbb{Z}) \cong \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_0(K), \mathbb{Z}) = \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}.$$

Si $i = 1$, $H_0(K) = \mathbb{Z}$ est un $\mathbb{Z}$-module libre et donc à nouveau $\operatorname{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(H_0(K), \mathbb{Z}) = 0$ et on en déduit un isomorphisme

$$H^1(K, \mathbb{Z}) \cong \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_1(K), \mathbb{Z}) = \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \cong \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \oplus \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}.$$

Si $i = 2$, on a $\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_2(K), \mathbb{Z}) = \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(0, \mathbb{Z}) = 0$ et donc

$$H^2(K, \mathbb{Z}) \cong \operatorname{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(H_1(K), \mathbb{Z}) = \operatorname{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \cong \operatorname{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \oplus \operatorname{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

Enfin, pour $i > 2$ ou $i < 0$, on a $H_i(K) = 0 = H_{i-1}(K)$ et on déduit du théorème des coefficients universels que $H^i(K, \mathbb{Z}) = 0$.

Pour calculer la cohomologie de K à coefficients dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, appliquons au complexe $(\star)$ le foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(-, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$. On obtient

$$0 \longleftarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}C, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \xleftarrow{\partial_2^*} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}a \oplus \mathbb{Z}b, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \xleftarrow{\partial_1^*} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}x, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \longleftarrow 0,$$

où $\partial_1^* = 0^* = 0$ et $\partial_2^* = (\times 2, 0)^* = 0$. Puisque $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \oplus \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z},$$

ceci revient donc à

$$0 \longleftarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \xleftarrow{0} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \xleftarrow{0} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longleftarrow 0.$$

On en conclut que

$$H^i(K, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \text{si } i = 0, 2, \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \text{si } i = 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Solution de l'Exercice 7 (n-torsion), *proposée par Daniel Zimmer*

Soient X un espace topologique et $n \geq 2$ un entier. On a pour tout i une suite exacte courte de groupes abéliens

$$0 \longrightarrow C_i(X, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\times n} C_i(X, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\pi} C_i(X, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \longrightarrow 0.$$

Ceci induit en fait une suite exacte courte de complexes et donc on en déduit l'existence d'une suite exacte longue en homologie

$$\cdots \longrightarrow H_i(X, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\times n} H_i(X, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\bar{\pi}} H_i(X, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \xrightarrow{\partial} H_{i-1}(X, \mathbb{Z}) \longrightarrow \cdots$$

On considère la factorisation de $\bar{\pi}$ et ∂ par leur image :

$$\begin{tikzcd}
 & & \operatorname{im} \bar{\pi} \arrow[dr] & & & \\
\cdots \arrow[r] & H_i(X, \mathbb{Z}) \arrow[r, "\times n"] & H_i(X, \mathbb{Z}) \arrow[u] \arrow[r, "\bar{\pi}"] & H_i(X, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \arrow[r, "\partial"] \arrow[dr] & H_{i-1}(X, \mathbb{Z}) \arrow[r] & \cdots \\
 & & & & \operatorname{im} \partial \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

On observe que par exactitude, $\operatorname{im} \bar{\pi} = \ker \partial$ et aussi

$$\operatorname{im} \partial \cong H_i(X, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) / \ker \partial = H_i(X, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) / \operatorname{im} \bar{\pi} = \operatorname{coker} \bar{\pi}.$$

Donc la suite

$$0 \longrightarrow \operatorname{im} \bar{\pi} \longrightarrow H_i(X, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \longrightarrow \operatorname{im} \partial \longrightarrow 0$$

est bien exacte. Par exactitude de la suite exacte longue en homologie ci-dessus, on a que

$$\operatorname{im}\partial = \ker(H_{i-1}(X,\mathbb{Z}) \xrightarrow{\times n} H_{i-1}(X,\mathbb{Z})).$$

Notons ce groupe ${}_n\mathrm{Tors}(H_{i-1}(X,\mathbb{Z}))$, il s'agit de la n-torsion de $H_{i-1}(X,\mathbb{Z})$. On a par ailleurs

$$\operatorname{im}\bar{\pi} \cong H_i(X,\mathbb{Z})/\ker\bar{\pi} = H_i(X,\mathbb{Z})/\operatorname{im}(\times n) = H_i(X,\mathbb{Z})/nH_i(X,\mathbb{Z}),$$

donc finalement on en déduit qu'on a pour tout i une suite exacte courte

$$0 \longrightarrow H_i(X,\mathbb{Z})/nH_i(X,\mathbb{Z}) \longrightarrow H_i(X,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \longrightarrow {}_n\mathrm{Tors}(H_{i-1}(X,\mathbb{Z})) \longrightarrow 0.$$

Remarquons que $H_i(X,\mathbb{Z})$ est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel si et seulement si $H_i(X,\mathbb{Z})$ est sans torsion et divisible (c'est-à-dire que pour tout $n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, la multiplication par n est surjective.) On peut restreindre ces deux conditions à seulement demander que $H_i(X,\mathbb{Z})$ est sans p-torsion et p-divisible pour tout p premier. Ces deux conditions peuvent s'écrire : pour tout p premier,

$$H_i(X,\mathbb{Z})/pH_i(X,\mathbb{Z}) = 0 \quad \text{et} \quad {}_p\mathrm{Tors}(H_i(X,\mathbb{Z})) = 0.$$

Par le début de l'exercice, on déduit que $H_i(X,\mathbb{Z})$ est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel pour tout i si et seulement si $H_i(X,\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) = 0$ pour tout i.

Ceci n'a en fait aucune chance d'être vrai en degré 0 si X est non vide car $H_0(X,\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^{\#\{\text{composantes connexes de } X\}}$, or $\mathbb{Z}$ n'est clairement pas divisible. On peut donc adapter ce qu'on a fait ci-dessus au cas de l'homologie réduite et alors on obtient : $\tilde{H}_i(X,\mathbb{Z})$ est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel pour tout i si et seulement si $\tilde{H}_i(X,\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) = 0$ pour tout i.