Questions combinatoires ouvertes en théorie des opérades

Muriel Livernet

LAGA–Université Paris 13

Journée scientifique du pôle mathSTIC, 9 avril 2014

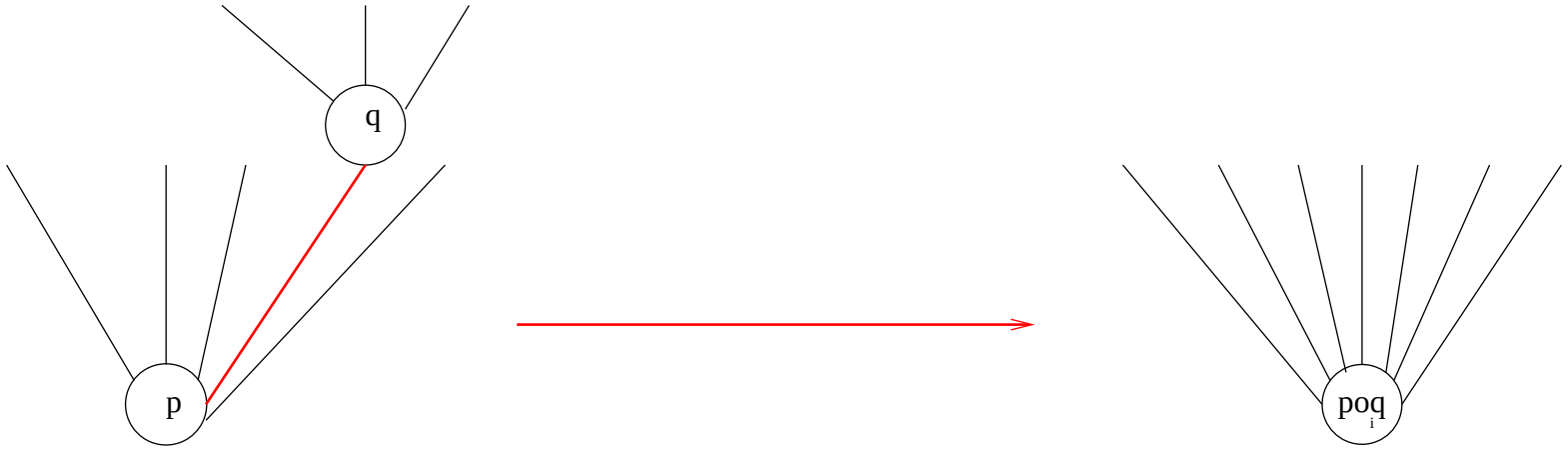
Les opérades

X un ensemble, $\mathrm{End}_X(n) = \mathrm{Map}(X^{\times n}, X)$

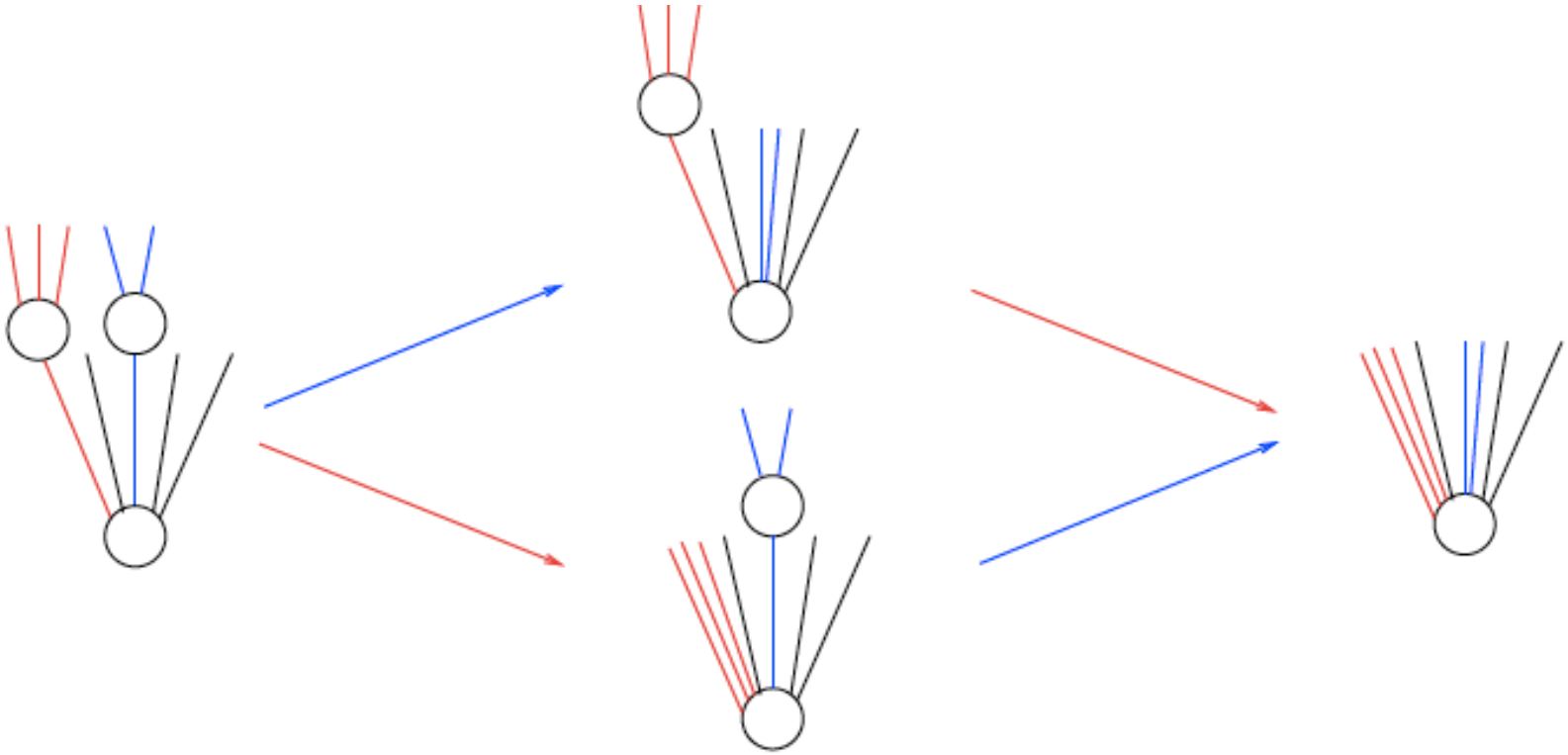
$$\circ_i : \mathrm{End}_X(n) \times \mathrm{End}_X(m) \to \mathrm{End}_X(n+m-1), \quad 1 \leq i \leq n$$

p d'arité n, q d'arité m, $p \circ_i q$ est d'arité $n+m-1$

$$(p \circ_i q)(x_1, \ldots, x_{n+m-1}) = \\ p(x_1, \ldots, x_{i-1}, q(x_i, \ldots, x_{i+m-1}), x_{i+m}, \ldots, x_{n+m-1})$$

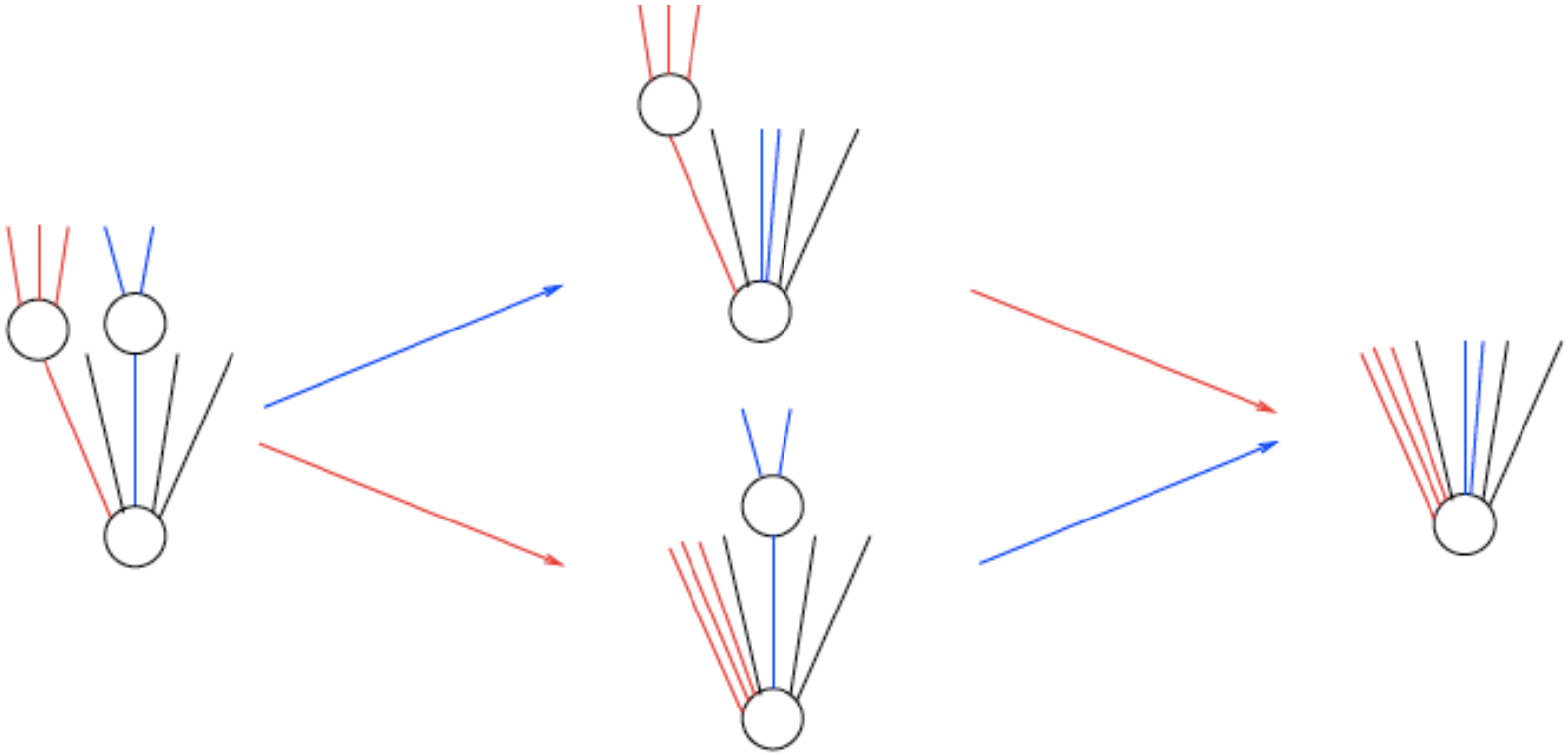


Axiomes



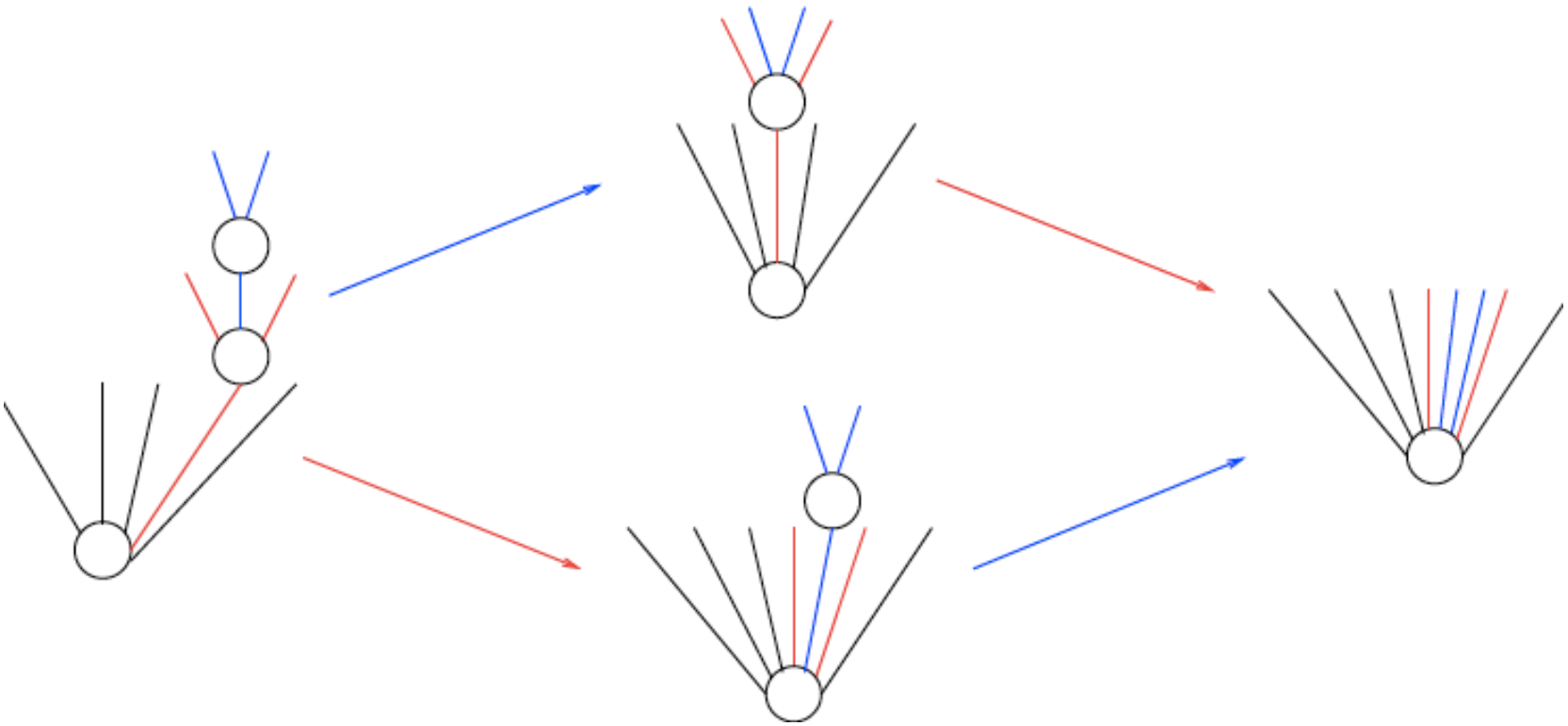
$$(p \circ_3 q) \circ_1 r \quad = \quad (p \circ_1 r) \circ_5 q,$$

Axiomes



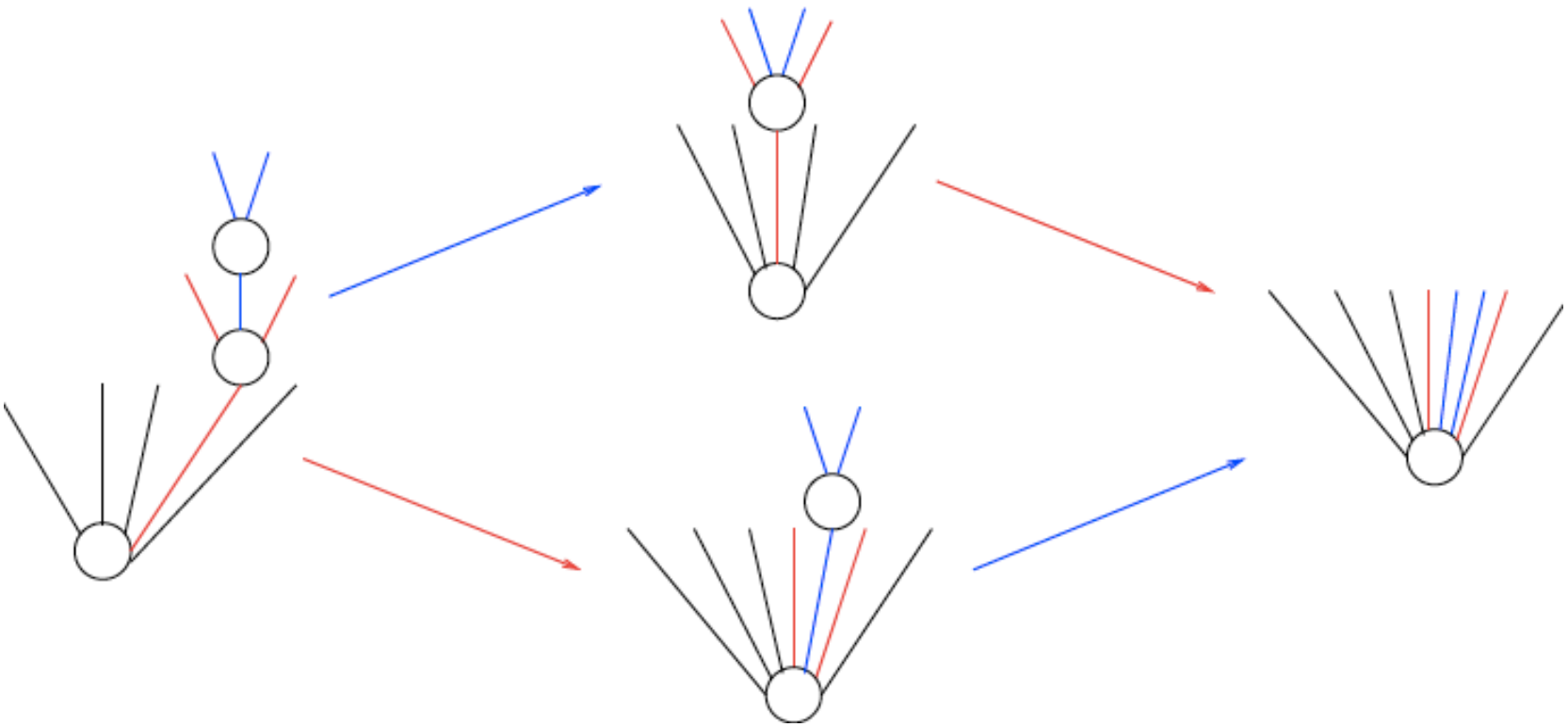
$$
\begin{aligned}
(p \circ_3 q) \circ_1 r &= (p \circ_1 r) \circ_5 q, \\
(p \circ_j q) \circ_i r &= (p \circ_i r) \circ_{j+|r|-1} q, \qquad 1 \leq i < j \leq |p|
\end{aligned}
$$

Axiomes



$$p \circ_4 (q \circ_2 r) \quad = \quad (p \circ_4 q) \circ_5 r,$$

Axiomes



$$
\begin{aligned}
p \circ_4 (q \circ_2 r) &= (p \circ_4 q) \circ_5 r, \\
p \circ_i (q \circ_k r) &= (p \circ_i q) \circ_{k+i-1} r, \quad 1 \leq i \leq |p|, 1 \leq k \leq |q|
\end{aligned}
$$

Opérade non-symétrique

$$\mathrm{End}_X(n) \longleftrightarrow \mathcal{P}(n)$$

$$\begin{array}{rccc} \circ_i : & \mathcal{P}(n) \times \mathcal{P}(m) & \to & \mathcal{P}(n+m-1) \\ & (p,q) & \mapsto & p \circ_i q \end{array}$$

Les axiomes s'écrivent

$$\begin{array}{rcll} (p \circ_j q) \circ_i r & = & (p \circ_i r) \circ_{j+|r|-1} q, & 1 \leq i < j \leq |p| \\ p \circ_i (q \circ_k r) & = & (p \circ_i q) \circ_{k+i-1} r, & 1 \leq i \leq |p|, 1 \leq k \leq |q| \end{array}$$

Avec une unité 1 dans $\mathcal{P}(1)$ vérifiant

$$1 \circ_1 p = p, \quad p \circ_i 1 = p.$$

Exemple: $Id_X : X \to X$

Algèbre sur une opérade non-symétrique

$\mathcal{P}$ une opérade; X un ensemble.

Definition

X est une $\mathcal{P}$-algèbre si

$$\begin{array}{rccc} ev_n : & \mathcal{P}(n) \times X^{\times n} & \to & X \\ & (p; x_1, \ldots, x_n) & \mapsto & p(x_1, \ldots, x_n) \end{array}$$

Vérifiant

$$(p \circ_i q)(x_1, \ldots, x_{n+m-1}) = \\ p(x_1, \ldots, x_{i-1}, q(x_i, \ldots, x_{i+m-1}), x_{i+m}, \ldots, x_{n+m-1})$$

Exemple: X est une End_X-algèbre:

$$p \in \mathrm{End}_X(n) = \mathrm{Map}(X^{\times n}, X) \Longrightarrow ev_n(p; x_1, \ldots, x_n) = p(x_1, \ldots, x_n)$$

Exemples d'opérades et d'algèbres

L'opérade non symétrique terminale:

$$\mathcal{A}(n) = \star_n \qquad \star_n \circ_i \star_m = \star_{n+m-1}$$

$\Longrightarrow$ $\mathcal{A}$ est engendrée par $\star_2$.
$\Longrightarrow$ Il y a une relation:

$$\star_2 \circ_1 \star_2 = \star_3 = \star_2 \circ_2 \star_2$$

On note $\mathcal{A} = \mathcal{F}(\star_2)/(\star_2 \circ_1 \star_2 \sim \star_2 \circ_2 \star_2)$

Quelles sont les algèbres sur $\mathcal{A}$?

Exemples d'opérades et d'algèbres

$$\mathcal{A}(n) = \star_n;\ \mathcal{A} = \mathcal{F}(\star_2)/(\star_2 \circ_1 \star_2 \sim \star_2 \circ_2 \star_2)$$

X est une $\mathcal{A}$-algèbre si pour tout n

$$ev_n : \mathcal{A}(n) \times X^{\times n} \to X$$

$$\Rightarrow \star_n (x_1, \ldots, x_n),$$

$$\Rightarrow \star_2 (x, y) =: x \cdot y$$

Exemples d'opérades et d'algèbres

$$\mathcal{A}(n) = \star_n;\ \mathcal{A} = \mathcal{F}(\star_2)/(\star_2 \circ_1 \star_2 \sim \star_2 \circ_2 \star_2)$$

X est une $\mathcal{A}$-algèbre: $x \cdot y := \star_2(x, y)$.

$$(x \cdot y) \cdot z = \star_2(\star_2(x, y), z) = \star_3(x, y, z) = \star_2(x, \star_2(y, z)) = x \cdot (y \cdot z).$$

Exemples d'opérades et d'algèbres

$$\mathcal{A}(n) = \star_n;\ \mathcal{A} = \mathcal{F}(\star_2)/(\star_2 \circ_1 \star_2 \sim \star_2 \circ_2 \star_2)$$

X est une $\mathcal{A}$-algèbre: $x \cdot y := \star_2(x, y)$.

$$(x \cdot y) \cdot z = \star_2(\star_2(x, y), z) = \star_3(x, y, z) = \star_2(x, \star_2(y, z)) = x \cdot (y \cdot z).$$

$\Rightarrow$ X est un monoïde

Exemples d'opérades et d'algèbres

$$\mathcal{A}(n) = \star_n;\ \mathcal{A} = \mathcal{F}(\star_2)/(\star_2 \circ_1 \star_2 \sim \star_2 \circ_2 \star_2)$$

X est une $\mathcal{A}$-algèbre: $x \cdot y := \star_2(x, y)$.

$$(x \cdot y) \cdot z = \star_2(\star_2(x, y), z) = \star_3(x, y, z) = \star_2(x, \star_2(y, z)) = x \cdot (y \cdot z).$$

$\Rightarrow$ X est un monoïde

Problématique: étant donné une opérade $\mathcal{P}$, peut-on la décrire par générateurs et relations?
$\Longrightarrow$ permet de mieux comprendre les algèbres sur $\mathcal{P}$

L'opérade des permutations : $\mathcal{S}(n) = S_n$

$$\sigma = (2, \boxed{3}, 1, 4) \qquad \tau = (2, 3, 1)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sigma \circ_3 \tau = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = (2, 4, 5, 3, 1, 6)$$

Si $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ et $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_m)$ avec $j = \sigma^{-1}(i)$

$$\sigma \circ_i \tau = (\widetilde{\sigma_1}, \ldots, \widetilde{\sigma_{j-1}}, \tau_1 + i - 1, \ldots, \tau_m + i - 1, \widetilde{\sigma}_{j+1}, \ldots, \widetilde{\sigma}_n).$$

Générateurs de l'opérade des permutations 1

$$\sigma \circ_i \tau = (\widetilde{\sigma_1}, \ldots, \widetilde{\sigma_{j-1}}, \underbrace{\tau_1 + i - 1, \ldots, \tau_m + i - 1}_{\text{intervalle}}, \widetilde{\sigma}_{j+1}, \ldots, \widetilde{\sigma}_n).$$

Definition

Une permutation est simple si elle ne contient pas de sous-intervalle propre.

Exemple: 354672891 n'est pas simple car elle contient les intervalles $[3, 5]$ ou $[4, 7]$.

$$354672981 = \text{"}3672981 \circ_3 354\text{"} = \underline{3}452761 \circ_3 132$$

$$354672981 = \text{"}342981 \circ_4 5467\text{"} = 3\underline{4}2651 \circ_4 2134$$

Générateurs de l'opérade des permutations 1

$$\sigma \circ_i \tau = (\widetilde{\sigma_1}, \ldots, \widetilde{\sigma_{j-1}}, \underbrace{\tau_1 + i - 1, \ldots, \tau_m + i - 1}_{\text{intervalle}}, \widetilde{\sigma}_{j+1}, \ldots, \widetilde{\sigma}_n).$$

Definition

Une permutation est simple si elle ne contient pas de sous-intervalle propre.

Proposition

L'opérade est engendrée par les permutations simples.

Générateurs en arité ≤ 5: $12, 21$; $2413, 3142$;
$24153, 25314, 31524, 35142, 41352, 42513$.

Relations dans l'opérade des permutations, algèbres

$$(12)\circ_1(12) = (123) = (12)\circ_2(12) \qquad (21)\circ_1(21) = (321) = (21)\circ_2(21)$$

Si X est une algèbre sur $\mathcal{S}$ alors:

- elle est munie de deux opérations binaires associatives
- $\forall n \geq 4, \sigma \in S_n$ simple donne $\mu_\sigma : X^{\times n} \to X$.

Relations dans l'opérade des permutations, algèbres

$$(12)\circ_1(12) = (123) = (12)\circ_2(12) \qquad (21)\circ_1(21) = (321) = (21)\circ_2(21)$$

Si X est une algèbre sur $\mathcal{S}$ alors:

- elle est munie de deux opérations binaires associatives
- $\forall n \geq 4, \sigma \in S_n$ simple donne $\mu_\sigma : X^{\times n} \to X$.

Théorème

$$\mathcal{S} = \mathcal{F}(\mu_\sigma | \sigma simple)/(ab)\circ_1(ab) \sim (ab)\circ_2(ab), \{a,b\} = \{1,2\}.$$

Références:

M. H. Alber, M. D. Atkinson, *The enumeration of simple permutations*, Journal of Integer Sequences, Vol. 6 (2003), article 03.4.4.

M. Aguiar, M. Livernet, *The associative operad and the weak order on the symmetric group*, Journal of Homotopy and Related Structures, 2, (2007), No. 1, pp. 57-84.

Opérade (symétrique)

Une relation dans $\mathcal{S}$:
$(\sigma\sigma') \circ_i (\tau\tau') = (\sigma \circ_i \tau)(\sigma' \circ_{\sigma^{-1}(i)} \tau)$

Opérade (symétrique)

Une relation dans $\mathcal{S}$:
$(\sigma\sigma') \circ_i (\tau\tau') = (\sigma \circ_i \tau)(\sigma' \circ_{\sigma^{-1}(i)} \tau)$

Definition

- Une opérade $\mathcal{P}$ est une opérade non symétrique. Chaque ensemble $\mathcal{P}(n)$ est muni d'une action à gauche du groupe symétrique S_n vérifiant
$$(\sigma \cdot p) \circ_i (\tau \cdot q) = (\sigma \circ_i \tau) \cdot (p \circ_{\sigma^{-1}(i)} q)$$
- Une $\mathcal{P}$-algèbre est un ensemble X muni d'évaluations ev_n invariantes sous l'action du groupe symétrique.

Opérade (symétrique)

Une relation dans $\mathcal{S}$:
$(\sigma\sigma') \circ_i (\tau\tau') = (\sigma \circ_i \tau)(\sigma' \circ_{\sigma^{-1}(i)} \tau)$

Definition

- Une opérade $\mathcal{P}$ est une opérade non symétrique. Chaque ensemble $\mathcal{P}(n)$ est muni d'une action à gauche du groupe symétrique S_n vérifiant
$$(\sigma \cdot p) \circ_i (\tau \cdot q) = (\sigma \circ_i \tau) \cdot (p \circ_{\sigma^{-1}(i)} q)$$
- Une $\mathcal{P}$-algèbre est un ensemble X muni d'évaluations ev_n invariantes sous l'action du groupe symétrique.

Exemple: $\mathcal{C}(n) = c_n$ muni de l'action triviale, et $c_n \circ_i c_m = c_{n+m-1}$. Une $\mathcal{C}$-algèbre est un monoïde commutatif:

$$((21) \cdot c_2)(x, y) = c_2(y, x) = y * x; \text{ et } ((21) \cdot c_2)(x, y) = c_2(x, y) = x * y.$$

Opérade (symétrique)

Une relation dans $\mathcal{S}$:
$(\sigma\sigma') \circ_i (\tau\tau') = (\sigma \circ_i \tau)(\sigma' \circ_{\sigma^{-1}(i)} \tau)$

Definition

- Une opérade $\mathcal{P}$ est une opérade non symétrique. Chaque ensemble $\mathcal{P}(n)$ est muni d'une action à gauche du groupe symétrique S_n vérifiant
$$(\sigma \cdot p) \circ_i (\tau \cdot q) = (\sigma \circ_i \tau) \cdot (p \circ_{\sigma^{-1}(i)} q)$$
- Une $\mathcal{P}$-algèbre est un ensemble X muni d'évaluations ev_n invariantes sous l'action du groupe symétrique.

L'opérade $\mathcal{S}$ est symétrique. Les algèbres sur $\mathcal{S}$ sont les monoïdes!

L'opérade (symétrique) des surjections

Definition

Une surjection (non dégénérée) $f : \underline{m} \to \underline{n}$ s'écrit $(f_1, \ldots, f_m)$, avec $f(i+1) \neq f(i)/$
Le degré de f est $|f| = m - n$.
$\mathrm{Surj}(n)$ ($\mathrm{Surj}(n)_d$) est l'ensemble des surjections (de degré d).
Le groupe symétrique S_n agit à gauche sur $\mathrm{Surj}(n)_d$.

Peut-on construire une opérade à partir de Surj?

Exemple

$$(\underline{1}, 2, \underline{1}) \circ_1 (1, 2)?$$

Rappel

$$(\underline{1}, 2) \circ_1 (1, 2) = (1, 2, 3).$$

L'opérade (symétrique) des surjections

Definition

Une surjection (non dégénérée) $f : \underline{m} \to \underline{n}$ s'écrit $(f_1, \ldots, f_m)$, avec $f(i+1) \neq f(i)/$
Le degré de f est $|f| = m - n$.
$\mathrm{Surj}(n)$ ($\mathrm{Surj}(n)_d$) est l'ensemble des surjections (de degré d).
Le groupe symétrique S_n agit à gauche sur $\mathrm{Surj}(n)_d$.

Peut-on construire une opérade à partir de Surj?

Exemple

$$(\underline{1}, 2, \underline{1}) \circ_1 (1, 2)?$$

Rappel

$$(\underline{1}, 2) \circ_1 (1, 2) = (1, 2, 3).$$

$\Rightarrow$ Quitter le monde des ensembles, utiliser les espaces vectoriels;
$\Rightarrow$ Faire des découpes.

L'opérade (symétrique) des surjections

Exemple

$$\begin{array}{rcccl} (\underline{1},2,\underline{1}) \circ_1 (1,2) & = & (\underline{1},2,\underline{1}) \circ_{1;1} 1|1,2 & + & (\underline{1},2,\underline{1}) \circ_{1;1} 1,2|2 \\ & = & (1,3,1,2) & + & (1,2,3,2). \end{array}$$

L'opérade (symétrique) des surjections

Exemple

$$\begin{array}{rcccl} (\underline{1},2,\underline{1}) \circ_1 (1,2) & = & (\underline{1},2,\underline{1}) \circ_{1;1} 1|1,2 & + & (\underline{1},2,\underline{1}) \circ_{1;1} 1,2|2 \\ & = & (1,3,1,2) & + & (1,2,3,2). \end{array}$$

Théorème

Les opérations $\circ_i$ *définies sur* $\mathbf{k}[\mathrm{Surj}(n)]$ *confèrent à* $\chi := \mathbf{k}[\mathrm{Surj}]$ *une structure d'opérade graduée.*

Une filtration sur χ

Definition

Une surjection $f \in \mathrm{Surj}(2)_{m-2}$ est de complexité c si le nombre de "changements" vaut c.

- $(1, 2)$ est de complexité 1.
- $(2, 1, 2)$ est de complexité 2.
- $(1, 2, 1, 2, 1)$ est de complexité 4.

Une surjection $f \in \mathrm{Surj}(n)_{m-n}$ est de complexité c si $c = max_{i,j} c_{i,j}$ où $c_{i,j}$ est la complexité de $f_{i,j} : \underline{m} \to \{i, j\}$.

Exemple

(12131) est de complexité 2: 1211, 1131 de complexité 2 et 23 de complexité 1.

Une filtration sur χ

Definition

Une surjection $f \in \mathrm{Surj}(2)_{m-2}$ est de complexité c si le nombre de "changements" vaut c.

- $(1,2)$ est de complexité 1.
- $(2,1,2)$ est de complexité 2.
- $(1,2,1,2,1)$ est de complexité 4.

Une surjection $f \in \mathrm{Surj}(n)_{m-n}$ est de complexité c si $c = max_{i,j} c_{i,j}$ où $c_{i,j}$ est la complexité de $f_{i,j} : \underline{m} \to \{i,j\}$.

$\Rightarrow$ fournit une filtration χ_c de χ par la complexité.

Théorème

Pour tout c, χ_c est une sous-opérade de χ.

L'opérade χ_2

Théorème (McClure-Smith, 2003)

L'opérade χ_2 est engendrée par les opérations

$$(1,2); (1,2,1,3,1,\cdots,n,1), \forall n \geq 2,$$

avec des relations que l'on appelle "cup"+"brace".

Explications:

- Arité 2: $(1,2)$ est de degré 0, $(1,2,1)$ est de degré 1 appelé le $\cup_1$-produit ou produit pré-Lie.
- Arité 3: $(1,2,1,3,1)$ de degré 2
- Arité n: $(1,2,1,3,1,\cdots,n,1)$ de degré $n-1$.

.

L'opérade χ_2

Théorème (McClure-Smith, 2003)

L'opérade χ_2 est engendrée par les opérations

$$(1,2); (1,2,1,3,1,\cdots,n,1), \forall n \geq 2,$$

avec des relations que l'on appelle "cup"+"brace".

Question ouverte: Décrire χ_3, puis χ_n par générateurs et relations.

Motivations

- $\mathcal{C}_d$ l'opérade des petits d-cubes est topologique. Elle reconnait les espaces de lacets d-itérés.
- Une opérade E_d est une opérade homotopiquement équivalente à $\mathcal{S}ing(\mathcal{C}_d)$.
- Une opérade E_d encode les structures commutatives "à d-homotopie près"
  $\Rightarrow$ Importance des modèles combinatoires

Motivations

Théorème (McClure-Smith, 2003)

L'opérade χ_d est une opérade E_d.

La description combinatoire de χ_2 par générateurs et relations a entrainé beaucoup de résultats de structure en topologie algébrique.

Motivations

Théorème (McClure-Smith, 2003)

L'opérade χ_d est une opérade E_d.

La description combinatoire de χ_2 par générateurs et relations a entrainé beaucoup de résultats de structure en topologie algébrique.

On ne sait rien pour $d > 2$.....