UNIVERSITÉ LOUIS PASTEUR
INSTITUT DE RECHERCHE MATHÉMATIQUE AVANCÉE

THÈSE

présentée pour obtenir le grade de
DOCTEUR de l'Université Louis Pasteur (Strasbourg I)
spécialité MATHÉMATIQUES

par

Muriel LIVERNET

HOMOTOPIE RATIONNELLE DES ALGÈBRES SUR UNE OPÉRADE

Soutenue le Mardi 17 Novembre 1998 devant la Commission d'Examen

MM.	Jean-Louis LODAY	Directeur de Thèse
	Yves FÉLIX	Membre du Jury
	Hans-Werner HENN	Rapporteur interne
	Jean-Michel LEMAIRE	Raporteur externe
	Claude ROGER	Raporteur externe

Remerciements

Je tiens tout d'abord à manifester toute ma gratitude à mon directeur de thèse Jean-Louis Loday. En premier lieu, son accueil chaleureux lors de mon mémoire de licence en 1993 m'a donné la certitude de vouloir faire une thèse sous sa direction. Je le remercie d'avoir accepté cette responsabilité. J'ai apprécié durant ces années son contact, son souci pédagogique, sa manière d'aborder les mathématiques ainsi que son ouverture d'esprit. Plus que tout, je le remercie d'avoir insisté avec beaucoup de patience devant mes réticences à m'intéresser à des domaines mathématiques que jusque là j'avais volontairement ignorés. Je lui sais gré de son sourire et de sa réponse "mais non tu ne me déranges pas" lorsque je toquais à sa porte, alors que le téléphone sonnait, la messagerie électronique bippait et qu'il croûlait sous les piles de paperasses ! Cela m'a souvent apporté un précieux réconfort. Qu'il trouve ici l'expression de toute ma sympathie.

Je souhaite remercier Hans-Werner Henn, Jean-Michel Lemaire et Claude Roger d'avoir accepté de rapporter ma thèse. Je suis reconnaissante à Yves Félix de m'avoir invitée à parler au séminaire d'algèbre et topologie de Louvain-La-Neuve. Au cours de nos quelques rencontres j'ai pu apprécier sa gentillesse et son humour. Je le remercie de sa participation à mon jury de thèse.

Je remercie également les membres du GdR "Topologie algébrique". Non seulement ce GdR m'a permis d'exposer mes travaux chaque année mais encore j'y ai rencontré des personnes avec qui discuter de mes problèmes mathématiques. Par ailleurs, j'ai apprécié la bonne ambiance qui y régnait.

J'ai trouvé au sein de l'IRMA des conditions de travail agréables et je remercie les bibliothécaires pour leur sympathie. J'en profite pour remercier toutes les personnes rencontrées au cours de mes pauses autour de la machine café, cet instant de répit avant de repartir travailler. Mon travail a été enrichi grâce à l'équipe d'algèbre et topologie. Son groupe de travail ainsi que son séminaire m'ont donné la possibilité de m'ouvrir sur d'autres mathématiques que mon sujet de thèse, dans une ambiance cordiale. J'en remercie tous les membres.

Je tiens à remercier particulièrement Victor Gnedbaye, qui a été un des premiers à m'accueillir et m'a initiée au TeX, ainsi qu'Alessandra Frabetti qui, grâce à son sourire et sa joie de vivre, ses peperonis, son huile d'olive et sa musique est devenue une amie de la famille, notre soleil d'Italie...

Ces remerciements ne seraient pas complets si je ne réservais pas un paragraphe spécial à Benoit Fresse, mon "cobureau" durant mes deux premières années de thèse. Je le remercie pour toutes les explications qu'il m'a fournies, toujours patiemment même si c'était la cinquième fois que je posais la même question. Je le remercie pour ses conseils “tu devrais lire cet article...” qui se terminaient souvent par “bon, je vais t’expliquer l’article...”. Je le remercie de ses efforts parfois maladroits pour me remonter le moral, pour tenter de me motiver, pour me pousser à faire des exposés au groupe de travail, même la veille de mes congés de maternité. Je le remercie également d’avoir lu avec attention mes articles et ma thèse. Pour tout cela, et bien d’autres choses encore, merci Benoit !

Je tiens à remercier tous ceux qui m’ont permis d’oublier un peu mes mathématiques et mes problèmes pour un moment. En particulier, entendre les difficultés rencontrées par les thésards de géophysique pendant le déjeûner, me permettait de relativiser mes propres difficultés et me redonnait le moral pour m’attaquer à mes problèmes.

Merci à tous mes amis qui m’ont apporté un soutien nécessaire au cours de mon travail. Merci à Sandrine : nos échanges de mails durant ces années m’ont souvent été d’un grand secours.

J’aimerais exprimer ma profonde reconnaissance envers mes parents qui m’ont donné la possibilité d’arriver là où je suis, parfois sans bien comprendre mes choix, parfois un peu inquiets mais toujours confiants.

Cette thèse n’aurait certainement pas vu le jour si je n’avais trouvé mon équilibre auprès de mon compagnon Yann, mon interlocuteur privilégié, lui qui n’a jamais cessé de croire en moi, m’encourageant à ne jamais baisser les bras. Enfin, je remercie Jérémie d’être venu au monde. Durant mes congés de maternité, ma thèse a pu décanter et cela m’a donné une énergie, un souffle et un regard nouveaux sur mon travail. J’ai pu également prendre conscience qu’un travail de recherche et une vie de famille n’étaient pas incompatibles...

Table des matières

Introduction **1**

Premier chapitre : rational homotopy of Leibniz algebras
`publié dans manuscripta mathematica (1998)` **7**

Introduction **9**
1. Definitions and properties of Leibniz algebras and Leibniz-dual algebras . . 10
2. Minimal models of differential graded algebras and Leibniz-dual algebras . 13
3. Relations between Leibniz algebras and Leibniz-dual algebras 16
4. Hurewicz and Freudenthal theorems for Leibniz algebras 21
5. Leibniz spheres and classical spheres 22

References **26**

Deuxième chapitre : homotopie rationnelle des algèbres sur une opérade **31**

Introduction **31**

1. Algèbres différentielles graduées sur une opérade **33**
1.1. Algèbres et cogèbres sur une opérade 33
1.2. Opérades quadratiques 36
1.3. Algèbres et cogèbres différentielles graduées 39
1.4. Complexe de Koszul et résolutions quasi-libres 40

2. Structure de catégorie modèle **45**
2.1. Notion de catégorie modèle 45
2.2. Structure de catégorie modèle des algèbres différentielles graduées sur une opérade 46
2.3. Caractérisation des cofibrations 47
2.4. Espaces de chemins 50
2.5. Caractérisation des cofibrations acycliques 51
2.6. Homotopie des applications et modèles cofibrants 53

2.7. Homologie de Quillen 56
3. Homotopie rationnelle des algèbres différentielles graduées 59
3.1. La théorie de l'homotopie rationnelle classique et celle des algèbres de Leibniz 59
3.2. Le théorème d'Hurewicz 60
3.3. Le théorème de Whitehead 61
3.4. Le modèle minimal d'une algèbre différentielle graduée 62
4. Théorie de l'obstruction pour les algèbres différentielles graduées . 67
4.1. Obstruction au relèvement des applications 68
4.2. Obstruction au relèvement des homotopies 72
5. Construction "+" 75
5.1. Existence et unicité de la construction "+" 76
5.2. Calcul de l'homotopie de $\mathrm{sl}(A)^+$ 79
Bibliographie 83

Introduction

L'étude de l'homotopie rationnelle a connu un nouvel essor à la suite du développement de deux modèles algébriques, le modèle de Quillen dans la catégorie des algèbres de Lie différentielles graduées et le modèle de Sullivan dans la catégorie des algèbres commutatives différentielles graduées réduites. Ces deux modèles contiennent toutes les informations homotopiques et homologiques rationnelles des espaces simplement connexes. Le modèle de Quillen est en fait un foncteur, noté λ, de la catégorie des espaces topologiques simplement connexes dans la catégorie des algèbres de Lie différentielles graduées réduites. En outre, D. Quillen a montré l'existence d'un couple de foncteurs adjoints, les foncteurs $\mathcal{C}$ et $\mathcal{L}$ de Quillen, entre la catégorie des algèbres de Lie différentielles graduées et la catégorie des cogèbres co-commutatives différentielles graduées réduites. On retrouve les informations homotopiques et homologiques des espaces simplement connexes de la manière suivante : soit S un espace topologique simplement connexe, alors

$$\pi_*(S) \otimes \mathbb{Q} \simeq H_{*-1}(\lambda S) \qquad ; \qquad H_*(S, \mathbb{Q}) \simeq H_*(\mathcal{C}(\lambda S)).$$

Dans le premier chapitre de cette thèse, nous nous proposons de développer une théorie de l'homotopie rationnelle non commutative. Plus précisément, nous remplaçons les algèbres de Lie par les algèbres de Leibniz. Une *algèbre de Leibniz* L est la donnée d'un espace vectoriel muni d'un crochet satisfaisant l'identité

$$[x, [y, z]] = [[x, y], z] - [[x, z], y], \ \forall x, y, z \in L.$$

Si l'on suppose de plus que le crochet est antisymétrique, cette relation est équivalente à la relation de Jacobi. En conséquence, une algèbre de Leibniz antisymétrique est une algèbre de Lie. Cela nous amène naturellement à la question : que doit-on introduire comme objet analogue aux algèbres commutatives afin de développer une théorie de l'homotopie rationnelle non commutative ?

Les résultats obtenus par V. Ginzburg et M. Kapranov sur les opérades quadratiques nous permettent de répondre à cette question. Une opérade est un objet algébrique codant un type d'algèbre ; ainsi l'opérade $\mathcal{C}$om va coder les algèbres commutatives (non unitaires), l'opérade $\mathcal{L}$ie, les algèbres de Lie, l'opérade $\mathcal{L}$eib, les algèbres de Leibniz, et ainsi de suite. Ginzburg et Kapranov ont adapté la théorie de la dualité de Koszul pour les algèbres associatives aux opérades quadratiques et, dans ce contexte, le dual de l'opérade $\mathcal{C}$om est l'opérade $\mathcal{L}$ie. Comme l'opérade $\mathcal{L}$eib est quadratique, cela nous suggère d'introduire le dual de cette opérade et de considérer les algèbres associées à cette opérade, que nous appelons *algèbres de Leibniz-dual*. Une algèbre de Leibniz-dual M est la donnée d'un espace vectoriel muni d'un produit $\cdot$ satisfaisant l'identité

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z) + x \cdot (z \cdot y), \ \forall x, y, z \in M.$$

Nous utilisons alors le couple "algèbres de Leibniz/algèbres de Leibniz-dual" pour construire une théorie de l'homotopie rationnelle non commutative. En particulier, nous montrons qu'il existe une paire de foncteurs adjoints entre la catégorie des algèbres de Leibniz différentielles graduées et la catégorie des cogèbres de Leibniz-dual différentielles graduées réduites, les foncteurs $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}^!$. A l'aide de ces foncteurs, nous définissons d'une part *l'homologie de Leibniz* d'une algèbre de Leibniz différentielle graduée A, notée $H\lambda(A)$, comme étant l'homologie du complexe $\mathcal{L}^!(A)$. D'autre part, nous définissons *l'homotopie de* A, notée $\pi\lambda(A)$, comme étant l'homologie du complexe sous-jacent à A, décalée d'un degré. Alors, il existe un morphisme $\pi\lambda(A) \to H\lambda(A)$ appelé *morphisme d'Hurewicz* et nous obtenons l'analogue du théorème d'Hurewicz rationnel.

Comme dans le cas des algèbres de Lie, il existe aussi une notion de modèle minimal pour les algèbres de Leibniz. Un *modèle minimal* d'une algèbre de Leibniz différentielle graduée A est un quasi-isomorphisme $A' \to A$, où A' est une algèbre de Leibniz graduée libre, munie d'une différentielle décomposable. Nous obtenons le résultat suivant :

Théorème. *Toute algèbre de Leibniz différentielle graduée réduite admet un modèle minimal unique à isomorphisme près.*

Ce modèle minimal contient de plus toutes les informations homotopiques et homologiques de l'algèbre de Leibniz.

Il nous a semblé intéressant de construire l'analogue des sphères : par définition, les n-ième sphères de Leibniz ont leur cohomologie concentrée en degré n et de dimension 1. Nous montrons alors que ces sphères sont uniques à homotopie près et que leur homotopie est périodique de période $n-1$.

Comme à toute algèbre de Leibniz graduée L, on peut associer une algèbre de Lie graduée en quotientant par les relations $[x,y] + (-1)^{|x||y|}[y,x]$, $\forall x, y \in L$, cela nous donne un élément de comparaison entre les sphères de Leibniz et les sphères classiques. Ainsi, nous obtenons le résultat suivant :

Théorème. *L'algèbre de Lie graduée associée à la n-ième sphère de Leibniz est le modèle de Quillen de la n-ième sphère classique.*

Par ailleurs, puisqu'une algèbre de Lie est *a fortiori* une algèbre de Leibniz, nous pouvons déterminer l'homologie de Leibniz du modèle de Quillen de la n-ième sphère classique, noté $\mathbb{S}^n$:

Théorème. *L'homologie de Leibniz de la n-ième sphère classique est périodique de période n si n est impair et périodique de période $3n-1$ si n est pair. Plus précisément on a*

a) Si n est impair, alors $H\lambda_i(\mathbb{S}^n) \simeq K$ pour $i = kn$, $k \geq 1$.

b) Si n est pair, alors $H\lambda_i(\mathbb{S}^n) \simeq K$ pour $i = n + k(3n-1)$ avec $k \geq 0$ ou pour $i = k(3n-1)$ avec $k \geq 1$, et vaut 0 sinon.

Le premier chapitre de cette thèse nous donne un exemple explicite d'une théorie d'homotopie rationnelle des algèbres sur une opérade de Koszul, qui sont les algèbres de Leibniz. En fait, il s'avère que la majorité des démonstrations ne fait pas intervenir la structure spécifique du produit des algèbres de Leibniz. Les résultats obtenus par E. Getzler et J.D.S. Jones vont d'ailleurs dans ce sens, à savoir qu'il existe une paire de foncteurs adjoints entre la catégorie des algèbres différentielles graduées sur une opérade de Koszul $\mathcal{P}$ ($\mathrm{dg}\,\mathcal{P}-\mathrm{Alg}$) et la catégorie des cogèbres différentielles graduées réduites sur $\mathcal{P}^!$ ($\mathrm{dg}\,\mathcal{P}^!-\mathrm{Cog}_0$), qui est le dual (au sens des opérades) de l'opérade $\mathcal{P}$:

$$C_{\mathcal{P}} \; : \mathrm{dg}\,\mathcal{P}-\mathrm{Alg} \leftrightarrows \mathrm{dg}\,\mathcal{P}^!-\mathrm{Cog}_0 \; : T_{\mathcal{P}}.$$

Le deuxième chapitre de cette thèse est consacré à l'étude de l'homotopie rationnelle des algèbres différentielles graduées sur une opérade de Koszul.

Comme dans le cas classique et le cas des algèbres de Leibniz, nous définissons *l'homologie opéradique* d'une algèbre différentielle graduée A sur une opérade de Koszul $\mathcal{P}$, notée $H^{\mathcal{P}}(A)$, comme étant l'homologie du complexe $C_{\mathcal{P}}(A)$, ainsi que *l'homotopie* de A, notée $\pi(A)$, comme étant l'homologie du complexe sous-jacent à A.

Nous étudions plus en détail l'analogie avec le cas classique. Ainsi, nous montrons que la catégorie $\mathrm{dg}\,\mathcal{P}-\mathrm{Alg}$ est une catégorie modèle fermée (au sens de Quillen) munie des trois classes de morphismes suivantes :

(i) les *équivalences faibles* sont les isomorphismes en homotopie,
(ii) les *fibrations* sont les surjections en degrés > 0,
(iii) les *cofibrations* sont les morphismes ayant la propriété de relèvement à gauche par rapport aux fibrations acycliques.

Bien que ces définitions paraissent assez classiques, il est généralement assez difficile d'avoir une caractérisation explicite des cofibrations. Dans notre cas, nous l'obtenons par l'intermédiaire des morphismes quasi-libres, c'est-à-dire des morphismes de la forme

$$A \to A \vee T(\mathcal{P}, V)$$

où A est une $\mathcal{P}$-algèbre différentielle graduée, où $\vee$ désigne le coproduit dans la catégorie $\mathrm{dg}\,\mathcal{P}-\mathrm{Alg}$ et où $T(\mathcal{P}, V)$ est la $\mathcal{P}$-algèbre graduée libre engendrée par l'espace vectoriel gradué V. Alors les cofibrations sont les rétractions de morphismes quasi-libres. Comme dans toute catégorie modèle, toute $\mathcal{P}$-algèbre différentielle graduée A admet une équivalence faible $F \to A$ avec F cofibrant, nous définissons *l'homologie de Quillen* de A, notée $H^{\mathrm{Q}}(A)$, comme étant l'homologie des indécomposables de F, et nous montrons que cette définition est indépendante du choix de F. Enfin, nous montrons que l'homologie de Quillen est isomorphe, à un décalage de degrés près, à l'homologie opéradique.

La structure de catégorie modèle, ainsi que la présence de notions d'homotopie et d'homologie dans la catégorie $\mathrm{dg}\,\mathcal{P}-\mathrm{Alg}$, nous incite à développer une théorie de l'homotopie rationnelle dans cette catégorie. En particulier, il existe un morphisme, appelé morphisme d'Hurewicz, entre l'homotopie et l'homologie de Quillen d'une $\mathcal{P}$-algèbre différentielle graduée, et nous obtenons les résultats suivants :

Théorème d'Hurewicz. *Soient A une $\mathcal{P}$-algèbre différentielle graduée et n un entier positif.*

a) Si $\pi_k(A) = 0$ pour $0 \leq k \leq n$, alors le morphisme d'Hurewicz est un isomorphisme pour $k \leq 2n+1$ et un épimorphisme pour $k = 2n+2$.

b) Si $\pi_0(A) = 0$ et $H_k^{\mathbb{Q}}(A) = 0$ pour $0 \leq k \leq n$, alors le morphisme d'Hurewicz est un isomorphisme pour $k \leq 2n+1$ et un épimorphisme pour $k = 2n+2$.

Théorème de Whitehead. *Soit $f : A \to B$ un morphisme de $\mathcal{P}$-algèbres différentielles graduées. Supposons A et B connexes (i.e. $\pi_0(A) = \pi_0(B) = 0$). Sous cette hypothèse, si f est un isomorphisme en homologie, alors f est un isomorphisme en homotopie.*

Pour achever la théorie de l'homotopie rationnelle des algèbres sur une opérade, nous construisons un modèle minimal d'une $\mathcal{P}$-algèbre différentielle graduée A connexe, unique à isomorphisme près et montrons qu'il contient toutes les informations homotopiques et homologiques de A.

Il nous a paru intéressant d'exploiter plus avant l'analogie entre les espaces topologiques rationnels et les algèbres sur une opérade, en particulier en ce qui concerne la construction "+". Cette construction est motivée par la K-théorie algébrique rationnelle. En effet, nous savons que la K-théorie rationnelle d'une algèbre associative unitaire A est la partie primitive de l'homologie de $\mathrm{BGL}(A)$. Or, nous constatons que le théorème de Loday-Quillen et Tsygan a la même forme : la partie primitive de l'homologie de Chevalley-Eilenberg de $\mathrm{gl}(A)$, où $\mathrm{gl}(A)$ désigne l'algèbre de Lie des matrices sur A, est l'homologie cyclique de A. Ainsi, nous avons la correspondance

$$K_*(A) \otimes \mathbb{Q} = \operatorname{Prim} H_*(\mathrm{BGL}(A)) \qquad ; \qquad HC_*(A) = \operatorname{Prim} H_{*+1}^{\mathcal{L}\mathrm{ie}}(\mathrm{gl}(A)).$$

Comme par définition, la K-théorie de A est l'homotopie de la construction "+" de Quillen de $\mathrm{BGL}(A)$, nous nous proposons de montrer que l'homologie cyclique est l'homotopie de la construction "+" d'une certaine algèbre de Lie différentielle graduée. A cet effet, nous montrons tout d'abord l'existence d'une construction "+" des algèbres différentielles graduées sur une opérade de Koszul. De plus, cette construction est unique à homotopie près et nous utilisons une théorie de l'obstruction développée indépendemment dans la catégorie $\mathrm{dg}\,\mathcal{P} - \mathrm{Alg}$ pour montrer cette unicité. Plus précisément, on a :

Théorème. *Soit $F = T(\mathcal{P}, V)$ une $\mathcal{P}$-algèbre différentielle graduée quasi-libre telle que $\pi_0(F)$ soit parfait. Alors il existe un morphisme quasi-libre $i : F \to F^+$ tel que $\pi_0(F^+) = 0$ et $H_*^{\mathbb{Q}}(i)$ soit un isomorphisme. De plus, le morphisme i est universel à homotopie près parmi les morphismes $F \to G$ tels que G soit connexe. En particulier le couple (i, F^+) est unique à homotopie près.*

Enfin, nous appliquons cette construction aux algèbres de Lie et aux algèbres de Leibniz. Désignons par $\mathrm{sl}(A)$ le noyau de l'application $\mathrm{Tr} : \mathrm{gl}(A) \to A/[A, A]$, qui est une algèbre de Lie parfaite. Nous pouvons alors considérer $\mathrm{sl}(A)$ soit comme une algèbre de Lie, soit comme une algèbre de Leibniz, et procéder à la construction "+" dans ces deux catégories. L'homologie cyclique réduite de A, notée $\overline{HC}_*(A)$, est l'homologie cyclique de A en degrés strictement positifs et est nulle en degré 0. Nous définissons de même l'homologie de Hochschild réduite, notée $\overline{HH}_*(A)$.

Proposition. *Soit A une algèbre associative unitaire. Considérons la construction "+" de $\mathrm{sl}(A)$ dans la catégorie des algèbres de Lie différentielles graduées. Alors*

$$\pi_*(\mathrm{sl}(A)^+) \simeq \overline{HC}_*(A).$$

Proposition. *Soit A une algèbre associative unitaire. Considérons la construction "+" de $\mathrm{sl}(A)$ dans la catégorie des algèbres de Leibniz différentielles graduées. Alors*

$$\pi_*(\mathrm{sl}(A)^+) \simeq \overline{HH}_*(A).$$

En conclusion, nous pouvons donc interpréter l'homologie cyclique comme une certaine K-théorie, de même que l'homologie de Hochschild, qui est l'obstruction à la périodicité de l'homologie cyclique.

PREMIER CHAPITRE

RATIONAL HOMOTOPY OF LEIBNIZ ALGEBRAS

Rational homotopy of Leibniz algebras

Introduction

In rational homotopy theory, Sullivan models ([Su]) deal with differential graded commutative algebras, whereas Quillen models ([Qu1]) deal with differential graded Lie algebras. The interest of these models lies in the fact that they both contain all rational homotopy and homology information of the simply connected space. The aim of this paper is to develop a similar theory in the non-commutative case. For that, we decide to replace Lie algebras by a non-commutative version, which are the *Leibniz algebras*. More precisely, a Leibniz algebra L is a vector space equipped with a bracket satisfying the identity

$$[x,[y,z]] = [[x,y],z] - [[x,z],y],\ \forall x,y,z \in L \text{ (see [Lo1])}.$$

If the antisymmetric relation is assumed, this identity is equivalent to the Jacobi relation. Hence, an antisymmetric Leibniz algebra is a Lie algebra. This raises the question of what will replace commutative algebras in order to construct a Sullivan-type model. From the work of Ginzburg and Kapranov ([G-K]), we know that Lie algebras and commutative algebras are algebras over Koszul operads which are dual to each other. This suggests to replace commutative algebras by *Leibniz-dual algebras* which are algebras over the dual operad defining the Leibniz algebras. More explicitly, a Leibniz-dual algebra M is a vector space together with a product satisfying the identity

$$(x\cdot y)\cdot z = x\cdot(y\cdot z) + x\cdot(z\cdot y),\ \forall x,y,z \in M.$$

The main goal of this paper is to show that Leibniz algebras and Leibniz-dual algebras are suitable for a non-commutative rational homotopy theory. We define the homotopy and the homology of a differential graded Leibniz algebra and we prove that a construction of minimal models is valid in this framework. Moreover, these minimal models contain all the homotopy and homology information of the Leibniz algebra.

Our second goal is to see if the classical theorems and constructions hold. We prove a Leibniz version of the Hurewicz theorem: if a differential graded Leibniz algebra is n-connected, then the Leibniz Hurewicz morphism is an isomorphism for $k \leq 2n$ (see theorem 4.3). Observe that in the classical Hurewicz theorem, it is an isomorphism for $k \leq n+1$. We deduce immediately a Leibniz version of the Freudenthal suspension theorem (see theorem 4.6). We construct n-Leibniz spheres, which are differential graded Leibniz algebras whose cohomology is trivial except in degree n. We prove the uniqueness of such an object. Moreover, we compute its homotopy which turns out to be periodic of period $n-1$ (see theorem 5.3). We compare Leibniz spheres to classical ones and we obtain that the Lie algebra associated to the n-Leibniz sphere is exactly the Quillen model of the classical n-sphere (theorem 5.4). Finally, as the Quillen model of the classical sphere is a Lie algebra, it is a Leibniz algebra. We prove the periodicity of its Leibniz homology, in theorem 5.5.

Contents. All definitions and properties of Leibniz algebras and Leibniz-dual algebras used in this article are recalled in the first section. The second section is devoted to minimal models. In the third section, we define a pair of adjoint functors between the category of Leibniz algebras and the category of reduced Leibniz-dual coalgebras which allow us to define the homotopy and the homology of a Leibniz algebra. We prove two theorems linking minimal models and the homotopy and homology of a Leibniz algebra (see theorems 3.10 and 3.11). The Leibniz version of the Hurewicz theorem and the Freudenthal suspension theorem are the subject of the fourth section. The fifth section focus on spheres. We define Leibniz spheres and compare them to classical spheres. Finally, we compute the Leibniz homology of the classical sphere.

Notation. We work over a fixed field K of characteristic 0. Let V be a graded vector space. The suspension of V is $(sV)_n = V_{n-1}$ if V is lower graded, and $(sV)^n = V^{n+1}$ if V is upper graded. The graded vector space V is said to be *reduced* (resp. 2-*reduced*) if $V_0 = 0$ (resp. $V_0 = V_1 = 0$) or $V^0 = 0$ (resp. $V^0 = V^1 = 0$). The graded vector space V is said to be *finite dimensional* if its dimension is finite in every degree. The group of permutation on n elements is denoted by S_n.

Aknowledgments. I am grateful to the paper's referee for pointed out some remarks which improved some theorems, especially the theorem 3.7.

1. Definitions and properties of Leibniz algebras and Leibniz-dual algebras

Leibniz algebras were introduced by J.-L. Loday (see [Lo1] for a survey). Leibniz algebras are algebras over a certain quadratic operad, denoted by $\mathcal{L}eib$. We refer to [G-K] concerning the theory of quadratic operads. The operad $\mathcal{L}eib$ admits a Koszul dual denoted by $\mathcal{L}eib^!$, and algebras over this operad are called Leibniz-dual algebras. In this section we recall the notion of graded algebras, differential graded algebras and prove that the operads $\mathcal{L}eib$ and $\mathcal{L}eib^!$ are Koszul operads.

Let V be a graded vector space and denote by $\overline{T}(V)$ the graded vector space $V \oplus V^{\otimes 2} \oplus \cdots \oplus V^{\otimes n} \oplus \cdots$. A tensor in $V^{\otimes n}$ is written either $(a_1, \cdots, a_n)$ or $a_1 \otimes \cdots \otimes a_n$. The symmetric group S_n acts on $V^{\otimes n}$ on the left by $\sigma \cdot (a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) = \epsilon_K(\sigma) a_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes a_{\sigma^{-1}(n)}$, or on the right by $(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) \cdot \sigma = \epsilon_K(\sigma) a_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes a_{\sigma(n)}$. The sign $\epsilon_K(\sigma)$ is the *Koszul sign* associated to σ. We say that the action on $V^{\otimes n}$ by the group S_n is the *signed action*, if it is the same action as before multiplied by the signature of the permutation.

Definition 1.1. A *graded Leibniz algebra* L is a lower graded vector space together with a bracket of degree 0 satisfying the identity

$$[x, [y, z]] = [[x, y], z] - (-1)^{|y||z|}[[x, z], y], \ \forall x, y, z \in L.$$

Let V be a graded vector space. By [Lo1], we know that $\overline{T}(V)$ has a unique structure of graded Leibniz algebra which may be described by

$$[x,(a_1,\cdots,a_n)]=(x,(a_1\otimes\cdots\otimes a_n)\cdot\mu_n),\ \forall x\in V^{\otimes m},\ \forall(a_1,\cdots,a_n)\in V^{\otimes n}.$$

The element $\mu_n\in K[S_n]$ is defined by induction as
$\mu_1=Id$,
$\mu_{n+1}=\mu_n+(-1)^{n+1}\mu_n\circ\tau_{n+1}^{-1}$,
where τ_n is the cycle $(12\cdots n)$ of S_n. Here, the action of S_n is the right signed action. Note that $a_1\otimes\cdots\otimes a_k=[[\cdots[a_1,a_2],\cdots],a_k],\ \forall\ a_1\otimes\cdots\otimes a_k\in V^{\otimes k}$. With this structure, the vector space $\overline{T}(V)$ is the free graded Leibniz algebra generated by V.

By reversing arrows in the definition of a Leibniz algebra we deduce the definition of a Leibniz coalgebra.

Definition 1.2. A *graded Leibniz coalgebra* C is an upper graded vector space together with a comultiplication Δ of degree 0 satisfying the identity

$$(id\otimes\Delta)\circ\Delta=(\Delta\otimes id-(id\otimes T)\circ(\Delta\otimes id))\circ\Delta,\ \text{where } T(a\otimes b)=(-1)^{|a||b|}b\otimes a.$$

The vector space $\overline{T}(V)$ can be equipped with a comultiplication Δ so that it becomes the free Leibniz coalgebra generated by V if $V^0=0$. More explicitly

$$\Delta(a_1,\cdots,a_n)=\sum_{k=1}^{n-1}(a_1,\cdots,a_k)\otimes\mu_{n-k}(a_{k+1},\cdots,a_n),\ \forall(a_1,\cdots,a_n)\in V^{\otimes n},n\geq 1,$$

where the action of S_n is the left signed action.

Definition 1.3. A *graded Leibniz-dual algebra* M is an upper graded vector space equipped with a multiplication of degree 0 satisfying the identity

$$(x\cdot y)\cdot z=x\cdot(y\cdot z)+(-1)^{|y||z|}x\cdot(z\cdot y),\ \forall x,y,z\in M.$$

Proposition 1.4. *Let M be a graded Leibniz-dual algebra. Denote by $*$ the product $x*y=x\cdot y+(-1)^{|x||y|}y\cdot x$. This product makes M into a graded associative and commutative algebra.* $\square$

Let V be a graded vector space. The free graded Leibniz-dual algebra generated by V is $\overline{T}(V)$ equipped with the following product

$$(v_1\otimes\cdots\otimes v_p)\cdot(v_{p+1}\otimes\cdots\otimes v_{p+q})=(Id\otimes sh_{p-1,q})(v_1\otimes\cdots\otimes v_{p+q}),\forall v_1,\cdots,v_{p+q}\in V,$$

where $sh_{p,q}=\sum_{\sigma\ =(p,q)-shuffle}\sigma$ and S_n acts on the left. We refer to [Lo2] for the proof. Note that $v_1\otimes\cdots\otimes v_k=v_1\cdot(v_2\cdot(\cdots(v_{k-1}\cdot v_k)\cdots))$.

By reversing arrows in the definition of a Leibniz-dual algebra we obtain the definition of a Leibniz-dual coalgebra.

Definition 1.5. A *graded Leibniz-dual coalgebra* B is a lower graded vector space together with a comultiplication Δ of degree 0 satisfying the identity

$$(\Delta \otimes id) \circ \Delta = (id \otimes \Delta + id \otimes (T \circ \Delta)) \circ \Delta.$$

The vector space $\overline{T}(V)$ can be equipped with a comultiplication Δ so that it becomes the free graded Leibniz-dual coalgebra on V if $V_0 = 0$ (see [O]):

$$\Delta(a_0, \cdots, a_p) = \sum_{k=0}^{p-1} J_k(a_0, (a_1, \cdots, a_p) \cdot sh_{k,p-k}),\ \forall (a_0, \cdots, a_p) \in V^{\otimes p+1},\ p \geq 1,$$

where S_n acts on the right. The map $J_k : \overline{T}(V) \to \overline{T}(V) \otimes \overline{T}(V)$ is defined by $J_k(a_0, a_1, \cdots, a_p) = (a_0, \cdots, a_k) \otimes (a_{k+1}, \cdots, a_p)$ if $0 \leq k \leq p-1$.

Definition 1.6. A *differential* of graded Leibniz algebras ϕ is a morphism of degree -1 which is a derivation of graded Leibniz algebras. More explicitly:

$$\phi([a, b]) = [\phi(a), b] + (-1)^{|a|}[a, \phi(b)].$$

A *differential* of graded Leibniz coalgebras ϕ is a morphism of degree 1 which is a coderivation of graded Leibniz coalgebras. More explicitly, if one denotes by (C, Δ) a graded Leibniz coalgebra, then using Sweedler notation ($\Delta(x) = \sum_{(x)} x_{(1)} \otimes x_{(2)}$)(cf. [Sw]),

$$\Delta(\phi(x)) = \sum_{(x)} \phi(x_{(1)}) \otimes x_{(2)} + (-1)^{|x_{(1)}|} x_{(1)} \otimes \phi(x_{(2)}).$$

A *differential graded* Leibniz algebra (resp. coalgebra) is a graded Leibniz algebra (resp. coalgebra) together with a differential. We have obviously the notion of a *differential graded Leibniz-dual algebra* and a *differential graded Leibniz-dual coalgebra*.

Definition 1.7. Let ϕ be a morphism between differential graded Leibniz algebras. If ϕ induces an isomorphism in homology, then ϕ is said to be a *weak equivalence*.

Since we have defined a certain type of algebras, we are interested in their homology. One can find their theoretic description in [G-K], or concerning the homology of Leibniz algebras in [Lo2], and the homology of Leibniz-dual algebras in [Bal]. The definition of the homology of a differential graded Leibniz algebra will be seen in definition 3.1.

Definition 1.8. Let (M, d) be a reduced differential graded Leibniz-dual algebra. The *homology* of M, denoted by $HLD(M)$ is the cohomology of the total complex $(\mathcal{C}l(M), \partial) = (\overline{T}(sM), \partial_1 + \partial_2)$, where

$$\partial_1(sx_1 \otimes \cdots \otimes sx_n) = \sum_{i=1}^{n} -(-1)^{u_{i-1}} sx_1 \otimes \cdots \otimes sdx_i \otimes \cdots \otimes sx_n$$

$\partial_2(sx_1 \otimes \cdots \otimes sx_n) = (-1)^{|sx_1|} s(x_1 \cdot x_2) \otimes \cdots \otimes sx_n + \sum_{i=2}^{n-1} (-1)^{u_i} sx_1 \otimes \cdots \otimes s(x_i * x_{i+1}) \otimes \cdots \otimes sx_n$

and $u_i = \sum_{j=1}^{i} | sx_j |$. The product $*$ is defined in proposition 1.4. Note that ∂ is a differential of degree 1.

Theorem 1.9. *Let $(M, d) = (\overline{T}(V), d)$ be a reduced differential free graded Leibniz-dual algebra. Its homology is the cohomology of the suspension of the indecomposable elements. More precisely,*

$$HLD_n(\overline{T}(V)) = H^{n+1}(V, \bar{d}),$$

where $\bar{d}$ is the differential induced by d on the indecomposable elements.

Proof. We define the bicomplex $C_{p,q} = (sM)^{\otimes p+1}_{q-p}$ with the differentials $\partial_1 : C_{p,q} \to C_{p,q+1}$ and $\partial_2 : C_{p,q} \to C_{p-1,q}$ defined in 1.8. The homology of M is the homology of the total complex C. We will prove that the homology of the $q-th$ row is concentrated in degree 0 and is exactly V^{q+1}. We fix q and set $D_p = C_{p,q}$ for $0 \leq p \leq q$ and $D_{-1} = V^{q+1}$. The differential on D is ∂_2 in degrees > 0 and the projection of $(s\,\overline{T}(V))^q$ on V^{q+1} in degree 0. There is a homotopy h between the identity and the zero morphism given by: $h_{-1} : D_{-1} \to D_0$ is the embedding of $(sV)^q$ into $(s\,\overline{T}(V))^q$, and $h_{n-1} : D_{n-1} \to D_n$ is given by $h_{n-1}(sa_1 \cdots a_k \otimes sx_2 \otimes \cdots \otimes sx_n) = (-1)^{|sa_1|} sa_1 \otimes sa_2 \cdots a_k \otimes sx_2 \otimes \cdots \otimes sx_n$ if $k > 1$, and is 0 otherwise. It is easy to check that $h_{n-1} \circ d + d \circ h_n = id_{D_n}$, $\forall n \geq 0$. □

The definition 1.8 is exactly the one given by Ginzburg and Kapranov (in [G-K]) for the homology of an algebra over a quadratic operad, in the case of the operad $\mathcal{L}eib^!$. Hence, we have the following corollary.

Corollary 1.10. *The operad $\mathcal{L}eib^!$ and the operad $\mathcal{L}eib$ are Koszul operads.* □

2. Minimal models of differential graded Leibniz algebras and Leibniz-dual algebras

The theory of minimal models of differential graded commutative algebras was first developped by Sullivan in [Su]. We refer to [Ta] or [Gr-M] for a survey. Later, it was proved that there exists a minimal model of a differential graded Lie algebra (see for instance [Ba-L] or [Ne]). In this section we prove that a differential graded Leibniz algebra or Leibniz-dual algebra, satisfying certain hypotheses, admits a minimal model unique up to isomorphism.

Definition 2.1. A *minimal differential graded Leibniz algebra* is a differential free graded Leibniz algebra generated by a reduced vector space V, together with a *decomposable* differential, that is a differential d satisfying $d(V) \subset \overline{T}(V) \cdot \overline{T}(V)$.

Definition 2.2. A *minimal differential graded Leibniz-dual algebra* is a differential free graded Leibniz-dual algebra generated by a 2-reduced vector space V, together with a *decomposable* differential, that is a differential d satisfying $d(V) \subset \overline{T}(V) \cdot \overline{T}(V)$.

Definition 2.3. Let (M, d) be a differential graded Leibniz algebra (resp. Leibniz-dual algebra). A *minimal model* of M is a minimal differential graded Leibniz algebra (resp. Leibniz-dual algebra) (M', d') together with a weak equivalence $\phi : (M', d') \to (M, d)$.

Theorem 2.4. *Any reduced differential graded Leibniz algebra (L, ∂) admits a minimal model unique up to isomorphism.*

Theorem 2.5. *Any differential graded Leibniz-dual algebra (M, d) whose cohomology is 2-reduced, admits a minimal model unique up to isomorphism.*

The proof of the theorem 2.5 is quite similar to the proof of the theorem 2.4. Let us prove theorem 2.4. The proof of the existence in the case of differential graded Lie algebras (see [Ne]) remains valid in our case. Uniqueness is proved using proposition 2.6 and the lifting lemma 2.9.

Proposition 2.6. *A weak equivalence between minimal differential graded Leibniz algebras is an isomorphism.*

Proof. Let $f : (X = \overline{T}(V), d) \to (Y = \overline{T}(W), d')$ be such a weak equivalence. Set $X[n] = \overline{T}(V_1 \oplus \cdots \oplus V_n)$, and $Y[n] = \overline{T}(W_1 \oplus \cdots \oplus W_n), \forall n \geq 1$. The vector space $X[n]$ (resp. $Y[n]$) is a sub-Leibniz algebra of X (resp. Y). We will prove, by induction on n, that f induces an isomorphism between $X[n]$ and $Y[n]$.

For $n = 1$, since V is reduced and d is decomposable, we have $d(V_2) = 0$. Hence $H_1(X) = V_1$, $H_1(Y) = W_1$ and $H_1(f) : V_1 \to W_1$ is an isomorphism. We deduce that f restricted to $X[1] = \overline{T}(V_1)$ is an isomorphism into $Y[1]$.

Assume that f induces an isomorphism between $X[n]$ and $Y[n]$. The short exact sequence associated to the inclusion $X[n] \to X$, yields the long exact sequence in cohomology

$$\begin{array}{ccccccccc}
H_{n+1}(X[n]) & \to & H_{n+1}(X) & \to & H_{n+1}(X/X[n]) & \to & H_n(X[n]) & \to & H_n(X) \\
\wr\downarrow {\scriptstyle H_{n+1}(f)} & & \wr\downarrow {\scriptstyle H_{n+1}(f)} & & \downarrow {\scriptstyle H_{n+1}(f)} & & {\scriptstyle H_n(f)}\downarrow\wr & & {\scriptstyle H_n(f)}\downarrow\wr \\
H_{n+1}(Y[n]) & \to & H_{n+1}(Y) & \to & H_{n+1}(Y/Y[n]) & \to & H_n(Y[n]) & \to & H_n(Y).
\end{array}$$

Hence, applying the five lemma, we get that $H_{n+1}(f) : H_{n+1}(X/X[n]) \longrightarrow H_{n+1}(Y/Y[n])$ is an isomorphism. But $H_{n+1}(X/X[n])$ is isomorphic to V_{n+1}, therefore f verifies the induction hypothesis at range $n + 1$. □

Definition 2.7. Let (Y, d) be a differential graded Leibniz algebra, and $\Lambda(t, dt)$ be the differential free graded commutative algebra generated by t in degree 0 and dt in degree -1, satisfying $d(t)=dt,\ d(dt)=0$. The vector space $Y\otimes\Lambda(t,dt)$ is a differential graded Leibniz algebra: the bracket is given by $[y\otimes a, y'\otimes a'] = (-1)^{|a||y'|}[y,y']\otimes aa'$, and its differential is given by $d(y\otimes a) = dy\otimes a + (-1)^{|y|}y\otimes da$. We denote by $Y(t,dt)$ the differential graded Leibniz algebra $Y\otimes\Lambda(t,dt)$ in degrees $n\geq 1$ and $Y(t,dt)_0 = Ker(d:(Y\otimes\Lambda(t,dt))_0\to(Y\otimes\Lambda(t,dt))_{-1}$. Define $p_0,p_1: Y(t,dt)\to Y$ by $p_0(y\otimes(a(t)+b(t)dt)) = a(0)y$ and $p_1(y\otimes(a(t)+b(t)dt)) = a(1)y$. Two morphisms $f,g:(X,d)\to(Y,d')$ of differential graded Leibniz algebras are said to be *homotopic* if there exists a morphism $h: X\to Y(t,dt)$ such that $p_0\circ h = f$ and $p_1\circ h = g$.

Remark 2.8. Since p_0 and p_1 are weak equivalences, if f is homotopic to g, then $H(f)=H(g)$.

Lifting lemma 2.9. *Let $\pi: A\to B$ be a weak equivalence between differential graded Leibniz algebras. Let X be a minimal differential graded Leibniz algebra and $f: X\to B$ be a morphism. Then, there exists a morphism $\tilde{f}: X\to A$ such that $\pi\circ\tilde{f}$ is homotopic to f.*

Proof. We set $X=(\overline{T}(V),d)$ and $X[n]=\overline{T}(V_1\oplus\cdots\oplus V_n)$, if $n\geq 1$. We will construct, by induction on n, some morphisms $\tilde{f}: X[n]\to A$ and $G: X[n]\to B(t,dt)$ satisfying $p_0\circ G = \pi\circ\tilde{f}$ and $p_1\circ G = f$.

Assume $n=1$ and fix $v\in V_1$. Since $df(v)=f(dv)=0\in B_1$, there exists $y\in A_1$ such that $dy=0$ and $[\pi(y)]=[f(v)]$ in $H_1(B)$. Hence, there exists $y\in A_1$ and $b\in B_2$ such that $\pi(y)=f(v)+db$. We set $\tilde{f}(v)=y$ and $G(v)=f(v)\otimes 1+db\otimes t+b\otimes dt$, and check that these morphisms satisfy the hypothesis.

Assume that these morphisms are built for $k\leq n$. Fix $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$ a basis of V_{n+1}. We want to extend $\tilde{f}$ to $X[n,x_\alpha]=\overline{T}(V_1\oplus\cdots\oplus V_n\oplus Kx_\alpha)$. Denote by c_α the element dx_α of $X[n]$. Since $d\tilde{f}(c_\alpha)=0$, applying remark 2.8, we have the identity $[\pi\circ\tilde{f}](c_\alpha)=[f](c_\alpha)=0$ in $H(B)$. By hypothesis π induces an isomorphism in homology, thus there exists $\eta\in A_{n+1}$ such that $\tilde{f}(c_\alpha)=d(\eta)$. We set $\tilde{f}(x_\alpha)=\eta$ and aim to extend G. Extending G is equivalent to the existence of a morphism $\bar{G}: X[n,x_\alpha]\to B(t,dt)$ making the following diagram commute

$$\begin{array}{ccc} X[n] & \xrightarrow{G} & B(t,dt) \\ \downarrow & & \downarrow {\scriptstyle \rho:=(p_0,p_1)} \\ X[n,x_\alpha] & \xrightarrow{r:=(\pi\circ\tilde{f},f)} & B\times B. \end{array}$$

Claim 1. *The obstruction to extend G to $\bar{G}$ lies in $H_n(Ker\rho)$.*

Proof. As ρ is surjective in degrees ≥ 1, we may choose $a\in B(t,dt)$ such that $\rho(a)=r(x_\alpha)$, and we define $\theta=d(a)-G(c_\alpha)$. It is easy to check that $\theta\in Z_n(Ker\rho)$, and that its class in $H_n(Ker\rho)$, denoted by $[\theta]$, does not depend on the choice of a. Then G extends to $\bar{G}$ if and only if there exists $\nu\in B(t,dt)$, satisfying $\rho(\nu)=r(x_\alpha)$ and $d(\nu)=G(c_\alpha)$, so if and only if $[\theta]=0$. □

The element $a=\pi(\eta)+(f(x_\alpha)-\pi(\eta))t$ satisfies $\rho(a)=r(x_\alpha)$. We define $\theta=d(a)-G(c_\alpha)\in Z_n(Ker\rho)$. The next claim computes $[\theta]$.

Claim 2. *If $\theta \in Z_n(Ker\rho)$, then there exists $u \in Z_{n+1}B$ such that $[\theta] = [udt]$.*

Proof. Consider the following short exact sequence

$$0 \to Ker\rho \xrightarrow{i} B(t,dt) \xrightarrow{\rho} B \times B \to 0.$$

We have $H(B(t,dt)) = H(B)$, $H(B \times B) = H(B) \times H(B)$ and $H(\rho)$ is the diagonal map which is injective. Therefore, in the long exact sequence in homology associated to the previous sequence, we obtain $H(i) = 0$. Thus, the connecting morphism $\delta_* : H_{n+1}(B \times B) \to H_n(Ker\rho)$ is surjective and is given by $\delta_*([\alpha,\beta]) = [(-1)^{n+1}(\beta-\alpha)dt]$, $\forall(\alpha,\beta) \in Z_{n+1}(B \times B)$. □

We are now able to finish the proof of the lifting lemma. We must modify $\tilde{f}(x_\alpha)$ so that there is no more obstruction to extend G. According to claim 2 and the hypothesis, there exists $u \in Z_{n+1}B$ and $\bar{u} \in Z_{n+1}(A)$ such that $[\pi(\bar{u})] = [u]$ and $[\theta] = [\pi(\bar{u})dt]$. We define $\tilde{f}(x_\alpha) = \eta + (-1)^{n+1}\bar{u}$. There exists a' such that $\rho(a') = (\pi(\eta) + (-1)^{n+1}\pi(\bar{u}), f(x_\alpha))$; for instance, we take $a' = a + (-1)^{n+1}\pi(\bar{u})(1-t)$. Since $\theta' = d(a') - G(c_\alpha) = da - \pi(\bar{u})dt - G(c_\alpha) = \theta - \pi(\bar{u})dt$, we obtain $[\theta'] = 0$. Then, we conclude with claim 1. □

Proof of uniqueness in theorem 2.4. Let $\phi : X \to M$ and $\psi : Y \to M$ be minimal models of (M,d). Since ϕ is a weak equivalence, by the lifting lemma 2.9, there exists a morphism $\tilde{\psi} : Y \to X$ such that $\phi \circ \tilde{\psi}$ is homotopic to ψ. Applying remark 2.8, we get $H(\phi) \circ H(\tilde{\psi}) = H(\psi)$, hence $H(\tilde{\psi})$ is an isomorphism. Proposition 2.6 allows us to conclude. □

3. Relations between Leibniz algebras and Leibniz-dual algebras

In classical rational homotopy theory ([Qu1], [Ta]), differential graded Lie algebras are related to reduced differential graded cocommutative coalgebras through functors $\mathcal{C}$ and $\mathcal{L}$. We define adjoint functors $\mathcal{L}^!$ and $\mathcal{L}$ between the categories of differential graded Leibniz algebras and reduced differential graded Leibniz-dual coalgebras. We prove that these functors as well as the unit and the counit of the adjunction preserve weak equivalences. We then define the homotopy and the homology of a differential graded Leibniz algebra and prove that minimal models contain all the homotopy and the homology information of the Leibniz algebra.

Definition 3.1. The functor $\mathcal{L}^! : \{$ differential graded Leibniz algebras$\} \to \{$reduced differential graded Leibniz-dual coalgebras$\}$ is defined as follows: let (L,∂) be a differential graded Leibniz algebra, then

$$\mathcal{L}^!(L,\partial) := (\overline{T}(sL), d = d_1 + d_2),$$

where $\overline{T}(sL)$ is the free graded Leibniz-dual coalgebra on sL (see definition 1.5),

$$d_1(sx_1 \otimes \cdots \otimes sx_n) = \sum_{i=1}^{n} -(-1)^{\epsilon_i} sx_1 \otimes \cdots \otimes s\partial x_i \otimes \cdots \otimes sx_n,$$

$$d_2(sx_1 \otimes \cdots \otimes sx_n) = \sum_{1 \le i < j \le n} (-1)^{t_{i,j}} sx_1 \otimes \cdots \otimes s[x_i, x_j] \otimes \cdots \otimes sx_n,$$

with $t_{i,j} = (\sum_{k=1}^{i} \mid sx_k \mid) + \mid sx_j \mid (\sum_{k=i+1}^{j-1} \mid sx_k \mid)$ and $\epsilon_i = \sum_{j=1}^{i-1} \mid sx_j \mid$.

It is easy to check that d_1 and d_2 are differentials of graded Leibniz-dual coalgebra, and the structure of a Leibniz algebra on L implies the same statement for d. The definition 3.1 is exactly the one given by Ginzburg and Kapranov (in [G-K]) for the homology of an algebra over a quadratic operad, in the case of the operad $\mathcal{L}eib$. Since this operad is a Koszul operad (see corollary 1.10), we are able to compute the homology of a free object.

Theorem 3.2. *Let $(L, \partial) = (\overline{T}(V), \partial)$ be a differential free graded Leibniz algebra. The homology of $\mathcal{L}^!(L, \partial)$ is the homology of the suspension of the indecomposable elements. More precisely,*

$$H_n(\mathcal{L}^!(L, \partial)) = H_{n-1}(V, \bar{\partial}),$$

where $\bar{\partial}$ is the differential induced by ∂ on the indecomposable elements. □

Definition 3.3. The functor $\mathcal{L}$: { reduced differential graded Leibniz-dual coalgebras} → { differential graded Leibniz algebras } is defined as follows: for any reduced differential graded Leibniz-dual coalgebra (B, d),

$$\mathcal{L}(B, d) := (\overline{T}(s^{-1}B), \partial = \partial_1 + \partial_2),$$

where $\overline{T}(s^{-1}B)$ is the free graded Leibniz algebra generated by $s^{-1}B$ (see definition 1.1), where ∂_1 is induced by d and ∂_2 is given by

$$\partial_2(s^{-1}x_1 \otimes \cdots \otimes s^{-1}x_n) = \sum_{(x_1)} (-1)^{s^{-1}x_{1(1)}} s^{-1}x_{1(1)} \otimes s^{-1}x_{1(2)} \otimes \cdots \otimes s^{-1}x_n$$

$$+ \sum_{i=2}^{n} (-1)^{\sum_{j=1}^{i-1} |s^{-1}x_j|} \sum_{(x_i)} (-1)^{|s^{-1}x_{i(1)}|} s^{-1}x_1 \otimes \cdots \otimes s^{-1}x_{i(1)} \otimes s^{-1}x_{i(2)} \otimes \cdots \otimes s^{-1}x_n$$

$$- \sum_{(x_i)} (-1)^{|s^{-1}x_{i(1)}| + |s^{-1}x_{i(1)}||s^{-1}x_{i(2)}|} s^{-1}x_1 \otimes \cdots \otimes s^{-1}x_{i(2)} \otimes s^{-1}x_{i(1)} \otimes \cdots \otimes s^{-1}x_n.$$

Theorem 3.4. *The functor $\mathcal{L}$ is left adjoint to $\mathcal{L}^!$.*

Proof. For any differential graded Leibniz algebra (L, ∂) and any reduced differential graded Leibniz-dual coalgebra (B, d), we denote by $\epsilon : \mathcal{L}\mathcal{L}^!(L, \partial) \to (L, \partial)$ the counit and by $\eta : (B, d) \to \mathcal{L}^!\mathcal{L}(B, d)$ the unit of the adjunction. Since $\mathcal{L}\mathcal{L}^!(L, \partial) = \overline{T}(s^{-1}\mathcal{L}^!(L, \partial))$ is a free graded Leibniz algebra, it is sufficient to make ϵ explicit on $s^{-1}\mathcal{L}^!(L, \partial) =$

$s^{-1}\,\overline{T}(sL)$. We set $\epsilon = 0$ on $s^{-1}\,\overline{T}(sL)^{\geq 2}$ and $\epsilon(s^{-1}sx) = x$ on $s^{-1}sL$. Similarly, applying the universal property for free Leibniz-dual coalgebras, η is the unique morphism from B to $\mathcal{L}^!\mathcal{L}(B,d)$ extending the map $\tilde{\eta} : B \to s\,\overline{T}(s^{-1}B)$ defined by $\tilde{\eta}(x) = ss^{-1}x$. □

Theorem 3.5. *The functor $\mathcal{L}^!$ preserves weak equivalences.*

Proof. Let $\psi : (L,\partial) \to (L',\partial')$ be a weak equivalence between differential graded Leibniz algebras. By definition 3.1, $\mathcal{L}^!(L,\partial) = (\overline{T}(sL), d = d_1 + d_2)$. There is a natural filtration on $\mathcal{L}^!$ given by $F^p = (\overline{T}(sL))^{\leq p} = \bigoplus_{k=1}^{p} (sL)^{\otimes k}$ and $F'^p = (\overline{T}(sL'))^{\leq p}$, $\forall p \geq 0$. Note that $F^0 = F'^0 = 0$, $F^1 = sL$, $F'^1 = sL'$, the pair (F^p, d) (resp. (F'^p, d')) is a sub-complex of $\mathcal{L}^!(L,\partial)$ (resp. $\mathcal{L}^!(L',\partial')$), and $\mathcal{L}^!(\psi)$ maps F^p to F'^p. Thus, we have the following commutative diagram with exact rows

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & F^{p-1} & \longrightarrow & F^p & \longrightarrow & F^p/F^{p-1} & \longrightarrow & 0 \\
 & & {\scriptstyle \mathcal{L}^!(\psi)}\downarrow & & & & \downarrow {\scriptstyle \overline{\mathcal{L}^!(\psi)}} & & \\
0 & \longrightarrow & F'^{p-1} & \longrightarrow & F'^p & \longrightarrow & F'^p/F'^{p-1} & \longrightarrow & 0.
\end{array}$$

Since the complex F^p/F^{p-1} is isomorphic to $((sL)^{\otimes p}, d_1)$ and d_1 coincides, up to sign, with ∂ on sL, then $H(F^p/F^{p-1}) \simeq (sH(L))^{\otimes p}$ and $H(\overline{\mathcal{L}^!(\psi)})$ is an isomorphism. Applying the long exact sequence in homology as well as the five lemma in the previous diagram, we deduce that, if the map $H\mathcal{L}^!(\psi) : H(F^{p-1}) \to H(F'^{p-1})$ is an isomorphism, then the map $H\mathcal{L}^!(\psi) : H(F^p) \to H(F'^p)$ is also an isomorphism. Because it is an isomorphism for $p = 0$ and $p = 1$ and because $H_k(\mathcal{L}^!(L,d)) = H_k(F^k)$, we get $H\mathcal{L}^!(\psi)$ is an isomorphism. □

Theorem 3.6. *The functor $\mathcal{L}$ preserves weak equivalences between 2-reduced differential graded Leibniz-dual coalgebras.*

Proof. This proof is similar to the previous one. Let $\psi : (B,d) \to (B',d')$ be a weak equivalence between 2-reduced differential graded Leibniz-dual coalgebras. Recall definition 3.3: $\mathcal{L}(B,d) = (\overline{T}(s^{-1}B), \partial = \partial_1 + \partial_2)$. The filtration on $\mathcal{L}$, given by $F^p = \overline{T}(s^{-1}B)^{\geq p}$, provides the following commutative diagram with exact rows

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & F^{p+1} & \longrightarrow & F^p & \longrightarrow & F^p/F^{p+1} & \longrightarrow & 0 \\
 & & {\scriptstyle \mathcal{L}(\psi)}\downarrow & & & & \downarrow {\scriptstyle \overline{\mathcal{L}(\psi)}} & & \\
0 & \longrightarrow & F'^{p+1} & \longrightarrow & F'^p & \longrightarrow & F'^p/F'^{p+1} & \longrightarrow & 0.
\end{array}$$

This implies that, if the map $H(\mathcal{L}(\psi)) : H(F^{p+1}) \to H(F'^{p+1})$ is an isomorphism, then the map $H(\mathcal{L}(\psi)) : H(F^p) \to H(F'^p)$ is also an isomorphism. By hypothesis, B is 2-reduced, so $H_k(F^{p+1}) = H_k(F'^{p+1}) = 0$, $\forall k \leq p$ and we can conclude. □

Theorem 3.7. *For any reduced differential graded Leibniz-dual coalgebra (B,d), the unit of the adjunction $\eta : (B,d) \to \mathcal{L}^!\mathcal{L}(B,d)$ is a weak equivalence. For any reduced differential graded Leibniz algebra (L,∂), the counit of the adjunction $\epsilon : \mathcal{L}\mathcal{L}^!(L,\partial) \to (L,\partial)$ is a weak equivalence.*

Proof. The first part of the theorem is straightforward using theorem 3.2. We will prove the second part of the theorem in two steps. The first step consists in proving the weak equivalence for a minimal differential graded Leibniz algebra. The second step is the conclusion. Indeed, let (L,∂) be a reduced differential graded Leibniz algebra. By theorem 2.4, (L,∂) admits a minimal model $(\tilde{L},\tilde{\partial})$. We have the following diagram

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}\mathcal{L}^!(L,\partial) & \stackrel{\epsilon_L}{\longrightarrow} & L \\ \mathcal{L}\mathcal{L}^!(\phi)\uparrow & & \uparrow\phi \\ \mathcal{L}\mathcal{L}^!(\tilde{L},\tilde{\partial}) & \stackrel{\epsilon_{\tilde{L}}}{\longrightarrow} & \tilde{L} \end{array}$$

Since ϕ and $\epsilon_{\tilde{L}}$ are weak equivalences as well as $\mathcal{L}\mathcal{L}^!(\phi)$ by theorems 3.5 and 3.6, we deduce that ϵ_L is a weak equivalence.

Let's prove the first step. Let $(L,\partial)=(\overline{T}(V),\partial)$ be a minimal differential graded Leibniz algebra. We recall that $V_0=0$ and ∂ is decomposable. There is a natural filtration on L given by $F^p(L)=\overline{T}(V)^{\geq p}$. Since the differential is decomposable, $\partial(F^p(L))\subset F^{p+1}(L)$. In the spectral sequence associated to this filtration, the E_0 term is $L'=(\overline{T}(V),0)$. Since the filtration is bounded, the spectral sequence converges. We introduce a filtration on $\mathcal{L}\mathcal{L}^!(L,\partial)=\overline{T}(s^{-1}\overline{T}(sL))$. Fix an elementary element $y=y_1\otimes\cdots\otimes y_p$ of $\mathcal{L}\mathcal{L}^!(L,\partial)$ where each y_i is of the form $s^{-1}sx_1^i\otimes\cdots\otimes sx_{q_i}^i$ and each $x_j^i\in V^{\otimes l_j^i}$. We define the degree of y_i by $\mathrm{Deg}(y_i)=\sum_{j=1}^{q_i} l_j^i$ and the degree of y by $\mathrm{Deg}(y)=\sum_{i=1}^{p}\mathrm{Deg}(y_i)$. Let A_p be the sub-vector space of $\mathcal{L}\mathcal{L}^!(L,\partial)$ generated by the elements of degree p and we denote by $\tilde{F}^p(\mathcal{L}\mathcal{L}^!(L,\partial))$ the filtration $\bigoplus_{k\geq p} A_k$. The filtration is a filtration of complex and ϵ_L preserves the filtration. Using the definitions of the differential on $\mathcal{L}^!(L,\partial)$ (see definition 3.1) and on $\mathcal{L}\mathcal{L}^!(L,\partial)$ (see definition 3.3), we check that

$$\tilde{F}^p\mathcal{L}\mathcal{L}^!(L,\partial)/\tilde{F}^{p+1}\mathcal{L}\mathcal{L}^!(L,\partial)\simeq\tilde{F}^p\mathcal{L}\mathcal{L}^!(L')/\tilde{F}^{p+1}\mathcal{L}\mathcal{L}^!(L').$$

But we have the following isomorphism of complexes

$$\bigoplus_{k\geq 1}\tilde{F}^p\mathcal{L}\mathcal{L}^!(L')/\tilde{F}^{p+1}\mathcal{L}\mathcal{L}^!(L')\simeq\mathcal{L}\mathcal{L}^!(L').$$

Hence the E_0-term associated to the filtration $\tilde{F}$ is $\mathcal{L}\mathcal{L}^!(L')$, and the spectral sequence converges. Moreover, L' can be written $\mathcal{L}(C)$ where C is a trivial Leibniz-dual coalgebra with the zero differential. The first part of the theorem gives that $\eta: C\to\mathcal{L}^!\mathcal{L}(C)$ is a weak equivalence, and since C is 2-reduced and $\mathcal{L}$ preserves weak equivalence, we deduce that $\mathcal{L}\eta$ is a weak equivalence. But the composite

$$\mathcal{L}(C)\stackrel{\mathcal{L}\eta}{\longrightarrow}\mathcal{L}\mathcal{L}^!\mathcal{L}(C)\stackrel{\epsilon_{\mathcal{L}(C)}}{\longrightarrow}\mathcal{L}(C)$$

is the identity, hence $\epsilon_{\mathcal{L}(C)}$ is a weak equivalence. By Zeeman's theorem of comparison of spectral sequences, we deduce that ϵ_L is a weak equivalence. $\square$

Definition 3.8. The *homotopy* of a differential graded Leibniz algebra (L, ∂), denoted by $\pi\lambda(L)$, is the graded vector space $\pi\lambda_*(L) = H_*(sL, \partial)$. The *homology* of L, denoted by $H\lambda(L)$, is the graded Leibniz-dual coalgebra $H\lambda_*(L) = H_*(\mathcal{L}^!(L, \partial))$. The *cohomology* of L is $H\lambda^*(L) = H^*Hom(\mathcal{L}^!(L, \partial), K)$.

Note that since the linear dual of a differential graded Leibniz-dual coalgebra is a differential graded Leibniz-dual algebra, the cohomology of a differential graded Leibniz algebra has the structure of a graded Leibniz-dual algebra.

Definition 3.9. A differential graded Leibniz algebra L is said to be *n-connected* if $\pi\lambda_k(L) = 0,\ \forall k \leq n$.

In the next theorems, we show that the theory of minimal models developped in section 2, is strongly related to the homotopy and the homology of a differential graded Leibniz algebra.

Theorem 3.10. *Let (L, ∂) be a reduced differential graded Leibniz algebra and $(\overline{T}(V), \partial')$ be its minimal model. The homotopy of L is the homology of the suspension of it's minimal model, and the homology of L is the suspension of the indecomposable elements of its minimal model. More precisely, we have*

$$\begin{gathered} \pi\lambda_*(L) \simeq H_*(s\,\overline{T}(V), \partial') \\ H\lambda_*(L) \simeq V_{*-1} \end{gathered}.$$

Proof. The first part of the theorem comes from the definition of a minimal model. We have a weak equivalence $\phi : (\overline{T}(V), \partial') \to (L, \partial)$, and by theorem 3.5, the functor $\mathcal{L}^!$ preserves weak equivalence. Hence, $H_*(\mathcal{L}^!(\phi)) : H_*(\mathcal{L}^!\,\overline{T}(V), \partial') \to H\lambda_*(L)$ is an isomorphism. Hence the theorem 3.2 combined with the fact that the differential ∂' is decomposable allows us to conclude. $\square$

Theorem 3.11. *Let (L, ∂) be a reduced finite dimensional differential graded Leibniz algebra. Let $(\overline{T}(V), d)$ be the minimal model of the differential graded Leibniz-dual algebra $Hom(\mathcal{L}^!(L, \partial), K)$. The cohomology of L is the cohomology of the complex $(\overline{T}(V), d)$, and the homotopy of L is the linear dual of the indecomposable elements of $\overline{T}(V)$. More precisely*

$$H\lambda^*(L) \simeq H^*(\overline{T}(V), d)$$

$$\pi\lambda_*(L) \simeq Hom(V^*, K)$$

Proof. The first part of the theorem comes from the definition of a minimal model. To prove the second part of the theorem, we use the functor $\mathcal{C}l$ defined in definition 1.8. In fact, for any finite dimensional 2-reduced differential graded Leibniz-dual algebra (M, d), we have

$$\mathcal{L}(Hom(M, K),{}^t d) \simeq Hom((\mathcal{C}l(M, d),{}^t \partial), K).$$

Since L is finite dimensional, we have a weak equivalence $\psi : \mathcal{L}^!(L, \partial) \to Hom(\overline{T}(V), K)$. But the functor $\mathcal{L}$ preserves weak equivalence between 2-reduced differential graded Leibniz-dual coalgebra, hence $\mathcal{L}(\psi) : \mathcal{L}\mathcal{L}^!(L, \partial) \to \mathcal{L}Hom(\overline{T}(V), K)$ is a weak equivalence. Applying theorem 3.7, we deduce that the homology of the left member is $s^{-1}\pi\lambda_*(L)$.
Using the previous remark, we deduce that the homology of the right member is $Hom(H^*(\mathcal{C}l(\overline{T}(V)), K)$, which is equal to $Hom(sV, K)$ by theorem 1.9. $\square$

4. Hurewicz and Freudenthal theorems for Leibniz algebras

In the previous section, we have constructed the homology and the homotopy of a differential graded Leibniz algebra. We prove a theorem analogous to the classical Hurewicz theorem for Leibniz algebras. We give a definition of the suspension of a Leibniz algebra and prove a Freudenthal suspension theorem similar to the classical one.

Let (L, ∂) be a differential graded Leibniz algebra. We want to give an other description of the homotopy and the homology of L in terms of a bicomplex, denoted by $(C_{*,*}, d)$. Explicitly $C_{p,q} = (sL^{\otimes p+1})_{p+q}$, $\forall p, q \geq 0$, and $d = d_1 + d_2$ where $d_1 : C_{p,q} \to C_{p,q-1}$ and $d_2 : C_{p,q} \to C_{p-1,q}$ are defined in definition 3.1.

Lemme 4.1. *With this new notation we have*

$$\begin{aligned}(\pi\lambda)_n(L) =& H_n(C_{0,*}, d_1),\\ (H\lambda)_n(L) =& H_n((TotC_{p,q})_*, d = d_1 + d_2). \ \square\end{aligned}$$

Definition 4.2. The embedding of complexes $(C_{0,*}, d_1) \to ((TotC_{p,q})_*, d)$ induces a morphism in homology $\phi\lambda_* : \pi\lambda_* \longrightarrow H\lambda_*$ called the *Hurewicz morphism.*

Theorem 4.3. *Let (L, ∂) be a differential graded Leibniz algebra. If L is n-connected, then the Hurewicz morphism is an isomorphism for all $k \leq 2n$ and an epimorphism for $k = 2n+1$. Conversely, if L is 1-connected and $H\lambda_k(L) = 0$, $\forall k \leq n$, then the Hurewicz morphism is an isomorphism for all $k \leq 2n$ and an epimorphism for $k = 2n+1$.*

Proof. The Künneth formula for chain complexes gives $H(sL^{\otimes k}) = (H(sL))^{\otimes k}$, $\forall k \geq 1$, where the differential on sL is d_1.

Assume that $\pi\lambda_k = 0$, $\forall k < n+1$. By lemma 4.1, we have $H_k(C_{0,*}) = 0$, $\forall k < n+1$. By the Künneth formula we see that $H_s(sL^{\otimes r}) = 0$, $\forall s < (n+1)r$. This gives us information about the homology of the columns of the bicomplex. Since $H_u(C_{r,*}) = H_{u+r}(sL^{\otimes r+1})$, we get $H_u(C_{r,*}) = 0$ if $u + r < (n+1)(r+1)$. For $r \geq 1$, if $u \leq 2n$, then $H_u(C_{r,*}) = 0$. As a result, the E_∞ term of the spectral sequence associated to the bicomplex C is 0 for $p \geq 1$ and $q \leq 2n$. We can conclude.

To prove the converse, we use the previous result by induction. If $n = 1$, we apply the first part of the theorem. Assume that the result is true at range $n-1$ and that $H\lambda_k = 0$, $\forall k \leq n$. Then by the induction hypothesis, $\pi\lambda_k = 0$, $\forall k \leq n-1$ and, applying the first part of the proof, we obtain $H_u(C_{r,*}) = 0,\ \forall r \geq 1,\ u \leq 2(n-1)$. Thus $\pi\lambda_n = H\lambda_n = 0$ and we go back to the first part. $\square$

Remark 4.4. This theorem implies a Leibniz version of the Hurewicz theorem: if L is $(n-1)$-connected, then $H\lambda_k(L) = 0,\ \forall k \leq n-1$ and $\phi\lambda_n$ is an isomorphism.

In classical rational homotopy theory, the suspension of a topological space S, denoted by ΣS, has for Quillen model $\pi_*(\Omega\Sigma S) \otimes \mathbb{Q}$ which is a free graded Lie algebra on $\mathbb{Q}$ equipped with the trivial differential. Moreover $H_n(S)$ is isomorphic to $H_{n+1}(\Sigma S)$. The Freudenthal suspension theorem states that if S is n-connected, then the suspension morphism
$\Sigma_r : \pi_r(S) \to \pi_{r+1}(\Sigma S)$ is an isomorphism for $1 \leq r \leq 2n$ and an epimorphism for $r = 2n+1$. We prove that we can define the suspension of a Leibniz algebra such that an analogous theorem holds.

Definition 4.5. Let (L, ∂) be a differential graded Leibniz algebra. The *suspension* of L, denoted by $\Sigma(L, \partial)$, is the differential graded Leibniz algebra $(\overline{T}(H\lambda_*(L, \partial)), 0)$. Of course we have $H\lambda_{n+1}(\Sigma(L, \partial)) = H_{n+1}(\mathcal{L}^!(\Sigma(L, \partial)), d = d_2)$ which is equal to $(H\lambda)_n(L, \partial)$ by theorem 3.2. Note that $\pi\lambda_{n+1}(\Sigma L) = \overline{T}(H\lambda_*(L, \partial))_n$. The *Freudenthal suspension morphism*, denoted by $\Sigma\lambda$, is the composite

$$\Sigma\lambda_n : \pi\lambda_n(L) \xrightarrow{\phi\lambda_n} H\lambda_n(L) \xrightarrow{i_n} \overline{T}(H\lambda(L))_n = \pi\lambda_{n+1}(\Sigma L).$$

Theorem 4.6. *Let (L, ∂) be a n-connected differential graded Leibniz algebra. The Freudenthal suspension morphism is an isomorphism for $k \leq 2n$ and an epimorphism for $k = 2n+1$.*

Proof. Theorem 4.3 asserts that the Hurewicz morphism $\phi\lambda_k$ is an isomorphism for $k \leq 2n$ and an epimorphism for $k = 2n+1$. Moreover $H\lambda_k(L) = 0$ for $k \leq n$, so $\overline{T}(H\lambda(L, \partial))_k = H\lambda_k(L, \partial),\ \forall k \leq 2n+1$. Hence i_k is an isomorphism for $k \leq 2n+1$. $\square$

5. Leibniz spheres and classical spheres.

In rational homotopy theory, it is well known that a rational space, which has the cohomology of a sphere, has in fact the same homotopy type. The aim of this section is to construct a n-Leibniz sphere: a differential graded Leibniz algebra L such that $H\lambda^n(L) = K$ and is zero elsewhere. We prove that such an object is unique up to homotopy type. We compute its homotopy, which turns out to be periodic.

Definition 5.1. Two reduced differential graded Leibniz algebras are said to have the *same homotopy type* if their minimal model are isomorphic.

Definition 5.2. Let $n \geq 2$. The *n-Leibniz sphere*, denoted by $\mathbb{S}\lambda^n$, is the differential free graded Leibniz algebra generated by one generator in degree $n-1$, equipped with the zero differential.

Theorem 5.3. *For $n \geq 2$, the cohomology of the n-Leibniz sphere is K in degree n and is* 0 *elsewhere. Its homotopy is periodic of period $n-1$. Explicitly $\pi\lambda_j(\mathbb{S}\lambda^n) = K$*

if $j = k(n-1)+1,\ k \geq 1$ and is 0 otherwise. Besides, any differential graded Leibniz algebra which has the same cohomology as the n-Leibniz sphere has the same homotopy type.

Proof. The homotopy calculation is immediate. Since the Leibniz sphere $\mathbb{S}\lambda^n$ is a minimal Leibniz algebra, its homology is K in degree n and is 0 elsewhere (see theorem 3.10). Hence, the cohomology is the same. Let (L, ∂) be a reduced differential graded Leibniz algebra whose cohomology is the same as the cohomology of $\mathbb{S}\lambda^n$. Let $(\overline{T}(V), \partial')$ be its minimal model. By theorem 3.10, we deduce that V is necessarily concentrated in degree $n-1$ and that $V_{n-1} \simeq K$. Let z be a generator of V_{n-1}. Since ∂' is decomposable of degree -1, we deduce immediatly that $\partial'(z) = 0$. Thus, the minimal model of (L, ∂) is $(\overline{T}(K_{n-1}), 0)$ which is isomorphic to $\mathbb{S}\lambda^n$. □

We would like now to compare Leibniz spheres and classical spheres. The Quillen model of the classical n-sphere will be denoted by $\mathbb{S}^n$. It is the free graded Lie algebra generated by one generator in degree $n-1$ together with the zero differential. To any graded Leibniz algebra L, we can associate a graded Lie algebra, taking the quotient of L by the relations $[x,y] + (-1)^{|x||y|}[y,x],\ \forall x, y \in L$ (see [Lo1]). Theorem 5.4 asserts that $\mathbb{S}^n$ is the Lie algebra associated to $\mathbb{S}\lambda^n$.

Since a Lie algebra is obviously a Leibniz algebra, the Leibniz homotopy and Leibniz homology of $\mathbb{S}^n$ can be computed. Clearly we have $\pi\lambda(\mathbb{S}^n) = \pi(\mathbb{S}^n)$. Theorem 5.5 computes the homology of $\mathbb{S}^n$.

Theorem 5.4. *The graded Lie algebra associated to the n-Leibniz sphere is the Quillen model of the classical n-sphere.* □

Theorem 5.5. *For $n \geq 2$, the Leibniz homology of the classical n-sphere is periodic of period n if n is odd and of period $3n-1$ if n is even. More precisely*

a) If n is odd $H\lambda_i(\mathbb{S}^n) \simeq K$, if $i = kn,\ k \geq 1$, and $H\lambda_i(\mathbb{S}^n) = 0$ otherwise.

b) If n is even $H\lambda_i(\mathbb{S}^n) \simeq K$ for $i = n + k(3n-1), k \geq 0$, or for $i = k(3n-1)$, $k \geq 1$, and $H\lambda_i(\mathbb{S}^n) = 0$ otherwise.

Proof. Recall that $\mathbb{S}^n$ is the free graded Lie algebra generated by one generator y_n in degree $n-1$ together with the zero differential. Hence the Leibniz homology of $\mathbb{S}^n$ is the homology of $(\mathcal{L}^!(\mathbb{L}(Ky_n)), d_2) = (\overline{T}(s\mathbb{L}(Ky_n)), d_2)$, where d_2 is given by

$$d_2(sx_1 \otimes \cdots \otimes sx_l) = \sum_{1 \leq i < j \leq l} (-1)^{t_{i,j}} sx_1 \otimes \cdots \otimes s[x_i, x_j] \otimes \cdots \otimes sx_l.$$

a) Since n is odd, $[y_n, y_n] = 0$; thus $d_2 = 0$ and the result follows.

b) In case n is even, $\mathbb{L}(Ky_n)$ is a graded vector space generated by y_n in degree $n-1$ and by $[y_n, y_n]$ in degree $2(n-1)$. Hence $(\overline{T}(s\mathbb{L}(Ky_n), d_2) = (\overline{T}(Ky \oplus Kz), d)$, where $|y| = n,\ |z| = 2n-1$. We call *elementary element* an element $x = x_1 \otimes \cdots \otimes x_l$ such that x_i is either y or z. The differential d is given on elementary elements by

$$d(x) = \sum_{\substack{(i,j), x_i = y, x_j = y \\ 1 \leq i < j \leq n}} (-1)^{t_{i,j}} x_1 \otimes \cdots \otimes x_{i-1} \otimes z \otimes x_{i+1} \otimes \cdots \otimes \hat{x_j} \otimes \cdots \otimes x_l,$$

where $t_{i,j}$ denotes the number of z in the decomposition of x lying before x_i.

Let $x = x_1 \otimes \cdots \otimes x_l$ be an elementary element of $\overline{T}(Ky \oplus Kz)$. Define $a(x)$ (resp. $b(x)$) to be the number of occurences of y (resp. of z) in x. The sub-vector space of $\overline{T}(Ky \oplus Kz)$ generated by the set of x such that $a(x) + 2b(x) = k$ is denoted by A_k. Since A_k is stable under d, it is in fact a subcomplex of $(\overline{T}(Ky \oplus Kz), d)$ and we have the identity $(\overline{T}(Ky \oplus Kz), d) = \oplus_{k \geq 1}(A_k, d)$. Thus, it is sufficient to compute the homology of A_k, $k \geq 1$. □

Lemme 5.6. *The homology of the complexes A_{3k}, A_{3k+1} and A_{3k+2} is periodic of period $3n-1$. More precisely,*

$$
\begin{array}{lll}
H_i(A_{3k}) \simeq K & \textit{for } i = k(3n-1),\ k \geq 1, & \textit{and is 0 otherwise,} \\
H_i(A_{3k+1}) \simeq K & \textit{for } i = n + k(3n-1),\ k \geq 0, & \textit{and is 0 otherwise,} \\
H_i(A_{3k+2}) = 0, & \forall\ i,\ \forall k. &
\end{array}
$$

Proof. This lemma is proved by induction on k. The lemma is true for A_1 and A_2: A_1 is concentrated in degree n and its differential is zero; the complex (A_2, d) is $0 \to K(y \otimes y) \to Kz \to 0$ with $d(y \otimes y) = z$, then A_2 is acyclic. Assume that the lemma is true for $A_{3(k-1)+1}$ and $A_{3(k-1)+2}$ and prove it for A_{3k}, A_{3k+1} and A_{3k+2}.

We have the following natural short exact sequence

$$0 \to A_{k-2} \xrightarrow{\phi} A_k \xrightarrow{\psi} A_{k-1} \to 0$$

where $\phi(x_1 \otimes \cdots \otimes x_l) = z \otimes x_1 \otimes \cdots \otimes x_l$, $\psi(y \otimes x_1 \otimes \cdots \otimes x_l) = x_1 \otimes \cdots \otimes x_l$ and $\psi(z \otimes x_1 \otimes \cdots \otimes x_l) = 0$. It is easy to check that $d \circ \phi = -\phi \circ d$, $d \circ \psi = \psi \circ d$, ϕ is injective, ψ is surjective and $\operatorname{Im} \phi = \operatorname{Ker} \psi$. It yields a long exact sequence in homology

$$\cdots \to H_p(A_{k-2}) \xrightarrow{\phi} H_{p+2n-1}(A_k) \xrightarrow{\psi} H_{p+n-1}(A_{k-1}) \xrightarrow{\gamma} H_{p-1}(A_{k-2}) \to \cdots$$

where γ is the connecting morphism. Actually, the connecting morphism is induced by the morphism

$$
\begin{array}{cccc}
\gamma : & A_k & \to & A_{k-1} \\
& x = x_1 \otimes \cdots \otimes x_l & \mapsto & \displaystyle\sum_{i | x_i = y} x_1 \otimes \cdots \otimes \hat{x_i} \otimes \cdots \otimes x_l.
\end{array}
$$

Let us prove that A_{3k} satisfies the lemma. The result is obtained by combining the induction hypothesis for $A_{3(k-1)+1} = A_{3k-2}$ and $A_{3(k-1)+2} = A_{3k-1}$ with the long exact sequence in homology. Moreover ϕ induces an isomorphism

$$H_{n+(k-1)(3n-1)}(A_{3(k-1)+1}) \xrightarrow{\phi} H_{k(3n-1)}(A_{3k}).$$

Let $t_{3(k-1)+1}$ be a cycle whose homology class generates $H_{n+(k-1)(3n-1)}(A_{3(k-1)+1})$. Then, the homology class of $\phi(t_{3(k-1)+1}) = z \otimes t_{3(k-1)+1} =: t_{3k}$ generates $H_{k(3n-1)}(A_{3k})$.

We prove, as above, that A_{3k+1} satisfies the lemma. Moreover ψ induces the following isomorphism

$$H_{n+k(3n-1)}(A_{3k+1}) \xrightarrow{\psi} H_{k(3n-1)}(A_{3k}).$$

Let t_{3k+1} be a cycle whose homology class generates $H_{n+k(3n-1)}(A_{3k+1})$, and such that $\psi(t_{3k+1}) = t_{3k}$. Necessarily $t_{3k+1} = y \otimes t_{3k} + z \otimes \beta$ and $d(t_{3k+1}) = z \otimes \gamma(t_{3k}) - z \otimes d(\beta) = 0$. For instance, $\beta = y \otimes t_{3(k-1)+1}$ is suitable.

Remark. We have constructed, step by step, generators of $H_{i(3n-1)}(A_{3i})$, $1 \leq i \leq k$ (resp. $H_{n+i(3n-1)}(A_{3i+1})$, $0 \leq i \leq k$), with one representative in A_{3i} (resp. in A_{3i+1}) denoted by t_{3i} (resp. t_{3i+1}) satisfying
$t_1 = y$,
$t_{3i} = z \otimes t_{3(i-1)+1}$,
$t_{3i+1} = y \otimes t_{3i} + z \otimes y \otimes t_{3(i-1)+1}$.

Finally, let us prove that A_{3k+2} satisfies the lemma. Applying last results and the long exact sequence in homology, we deduce that $H_i(A_{3k+2}) = 0$ for $i \neq k(3n-1) + 2n$ and $i \neq k(3n-1) + 2n - 1$. The following exact sequence remains (set $l = k(3n-1)$)

$$0 \to H_{l+2n}(A_{3k+2}) \xrightarrow{\psi} H_{l+n}(A_{3k+1}) \xrightarrow{\gamma} H_l(A_{3k}) \xrightarrow{\phi} H_{l+2n-1}(A_{3k+2}) \to 0.$$

It suffices to prove that γ is an isomorphism. But $\gamma(t_{3k+1}) = t_{3k} + y \otimes \gamma(t_{3k}) + z \otimes \gamma(\beta)$. Observing that $d(y \otimes \beta) = z \otimes \gamma(\beta) + y \otimes d(\beta) = z \otimes \gamma(\beta) + y \otimes \gamma(t_{3k})$, we deduce $[\gamma(t_{3k+1})] = [t_{3k}]$. Hence γ maps generator to generator, so γ is an isomorphism. □

Corollary 5.7.
a) If $n > 1$ is odd, then the Leibniz cohomology of the classical n-sphere is the free graded Leibniz-dual algebra generated by one generator in degree n.
b) If n is even, then the Leibniz cohomology of the classical n-sphere is the graded Leibniz-dual algebra generated by two elements, denoted by a and b, such that $\mid a \mid = 3n-1$, $\mid b \mid = n$, and satisfying the relations $b \cdot b = a \cdot b = 0$. Let a^k be the product $a \cdot a^{k-1}$, with $a^1 = a$. Then, a^k is a generator of $H\lambda^{k(3n-1)}(\mathbb{S}^n)$ and $b \cdot a^k$ is a generator of $H\lambda^{k(3n-1)+n}(\mathbb{S}^n)$.

Proof. The case n is even is immediate. We know that the homology of a graded Leibniz algebra is a graded Leibniz-dual coalgebra, so its cohomology is a graded Leibniz-dual algebra. Let Δ be the comultiplication defining the structure of graded Leibniz-dual coalgebra on $\mathcal{L}^!(\mathbb{S}^n)$. From an induction equality for Δ (see [O]) and the definition 1.5 of graded Leibniz-dual coalgebra we deduce the graded Leibniz-dual coalgebra structure $\tilde{\Delta}$ on the homology of the n-sphere. More explicitly, $\tilde{\Delta}$ is defined on the generators t_{3k} and t_{3k+1} by $\tilde{\Delta}(t_1) = 0$, $\tilde{\Delta}(t_3) = 0$, and

$$\tilde{\Delta}(t_{3k+1}) = \sum_{i=0}^{k-1}\gamma_i^k t_{3i+1}\otimes t_{3(k-i)}, \quad \forall k\geq 1,$$

$$\tilde{\Delta}(t_{3k}) = \sum_{i=1}^{k-1}\gamma_{i-1}^{k-1} t_{3i}\otimes t_{3(k-i)}, \quad \forall k\geq 2,$$

where γ_i^k is given by induction:

$$\begin{aligned}\gamma_0^k &= 1, \ \forall k\geq 1,\\ \gamma_i^k &= \gamma_{i-1}^{k-1} + (-1)^{i(k-i)}\gamma_{k-i-1}^{k-1}, \ \forall\ k\geq 1, \ \forall\ 1\leq i<k.\end{aligned}$$

Denote by a_k (resp. b_k) the linear dual of t_{3k} (resp. t_{3k+1}). Hence a_k is a generator of $H^{k(3n-1)}(\mathbb{S}^n)$ for $k\geq 1$ and b_k is a generator of $H^{n+k(3n-1)}(\mathbb{S}^n)$ for $k\geq 0$. Then, we have the relations

$$\begin{aligned} b_i\cdot a_{k-i} &= \gamma_i^k b_k, \quad \forall\ 0\leq i\leq k-1, \quad & a_{k-i}\cdot b_i &= 0, \quad \forall\ 0\leq i\leq k-1,\\ a_i\cdot a_{k-i} &= \gamma_{i-1}^{k-1}a_k, \quad \forall\ 1\leq i\leq k-1, \quad & b_i\cdot b_j &= 0 \quad \forall i,j.\end{aligned}$$

By setting $a=a_1$ and $b=b_0$, it is easy to check that these conditions are equivalent to the conditions $b\cdot b=a\cdot b=0$. $\square$

Bibliographie.

[Bal] D. Balavoine, “Déformations de structures algébriques et opérades”, PhD thesis, Université Montpellier 2, (1997).

[Ba-L] M.L. Baues, J.-M. Lemaire, *Minimal models in homotopy theory*, Math. Ann. (3)**225** (1977), 219-242.

[B-K] A.K. Bousfield, V.K.A.M. Gugenheim, *On PL De Rham theory and rational homotopy type*, Mem. of A.M.S (8)**179** (1976).

[F-H] Y. Félix, S. Halperin, J.-C. Thomas, *Differential graded algebras in topology*, in “Handbook of algebraic topology”, North-Holland (1995), 829-865.

[F-Th] Y. Félix, J.-C. Thomas, *Homotopie rationnelle, dualité et complémentarité des modèles*, Bull. Soc. Math. Belgique **23** (1981), 7-19.

[G-K] V. Ginzburg, M. Kapranov, *Koszul duality for operads*, Duke J.Math. (1)**76** (1994), 203-272.

[Gr-M] P.A. Griffiths, J.W. Morgan, “Rational homotopy theory and differential forms”, Progress in Math. **16** (1981), Birkhäuser.

[Lo1] J.-L Loday, *Une version non-commutative des algèbres de Lie : les algèbres de Leibniz*, Ens. math. **39** (1993), no 3-4, 269-293.

[Lo2] J.-L Loday, *Cup-product for Leibniz cohomology and dual Leibniz algebras*, Math. Scand. **77** (1995), 189-196.

[Lo3] J.-L Loday, *La renaissance des opérades*, Astérisque **237** (1996), 47-74.
[Lo-P] J.-L Loday, T. Pirashvili, *Universal enveloping algebras of Leibniz algebras and (co)homology*, Math. Ann. **296** (1993), 139-158.
[Ne] J. Neisendorfer, *Lie algebras, coalgebras, and rational homotopy theory for nilpotent spaces*, Pacific J. Math. (2)**74** (1978), 429-460.
[O] J.-M. Oudom, *Coproduct and cogroups in the category of graded dual Leibniz algebras*, in "Operads: Proceedings of Renaissance Conferences (Hartford, CT/Luminy, 1995)", 115-135, Contemp. Math., **202**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997.
[Qu1] D. Quillen, *Rational Homotopy theory*, Ann. of Math. (2)**90** (1969), 205-295.
[Qu2] D. Quillen, "Homotopical Algebra", Springer Lecture Notes in Math. **43**, 1967.
[Su] D. Sullivan, *Infinitesimal computations in Topology*, Publ. I.H.E.S. **47** (1977), 269-331.
[Sw] M.E. Sweedler, "Hopf algebras", Benjamin, 1969.
[Ta] D. Tanré, "Homotopie rationnelle : Modèles de Chen, Quillen, Sullivan", Springer Lecture Notes in Math. **1025**, 1980.

DEUXIÈME CHAPITRE

HOMOTOPIE RATIONNELLE DES ALGÈBRES SUR UNE OPÉRADE

Introduction

Ce second chapitre est consacré à l'étude de l'homotopie rationnelle des algèbres différentielles graduées sur une opérade de Koszul.

Dans la première partie, nous rappelons les définitions et propositions relatives aux opérades nécessaires à l'ensemble de l'étude. Notamment, si $\mathcal{P}$ est une opérade de Koszul, alors toute $\mathcal{P}$-algèbre différentielle graduée A admet une résolution quasi-libre, appelée *résolution de Koszul* :

$$T_{\mathcal{P}}(C_{\mathcal{P}}(A)) \to A \text{ (voir 1.4.6).}$$

En outre le complexe $C_{\mathcal{P}}(A)$ fournit une théorie d'homologie, et nous appelons *homologie opéradique* de A, l'homologie de ce complexe. Dans le but de distinguer l'homologie de la $\mathcal{P}$-algèbre différentielle graduée A de l'homologie du complexe A nous désignons cette dernière par *l'homotopie* de A.

La résolution de Koszul est un élément qui nous permet de montrer, dans la deuxième partie, que la catégorie des algèbres différentielles graduées sur une opérade de Koszul est une catégorie modèle fermée (au sens de Quillen), avec les trois classes de morphismes suivantes :

(i) les *équivalences faibles* sont les isomorphismes en homotopie,
(ii) les *fibrations* sont les surjections en degrés > 0,
(iii) les *cofibrations* sont les morphismes ayant la propriété de relèvement à gauche par rapport aux fibrations acycliques.

Comme toute $\mathcal{P}$-algèbre A admet un modèle cofibrant $F \to A$, nous définissons *l'homologie de Quillen*, notée $H_*^{\mathrm{Q}}(A)$, comme étant l'homologie du module des indécomposables de F, qui est le conoyau de l'application produit

$$\bigoplus_{k\geq 2} \mathcal{P}(k) \otimes_{\mathrm{S}_k} F^{\otimes k} \to F.$$

Nous montrons que cette homologie ne dépend pas de F ; par ailleurs, elle est isomorphe à un décalage de degrés près à l'homologie opéradique.

La troisième partie est axée sur l'étude de l'homotopie rationnelle proprement dite. Notamment, nous obtenons l'analogue des théorèmes d'Hurewicz et de Whitehead. Puis, nous construisons le modèle minimal d'une $\mathcal{P}$-algèbre différentielle graduée connexe A et montrons qu'il contient toutes les informations homotopiques et homologiques de A.

La théorie de l'obstruction est l'objet de la quatrième partie. Nous déterminons l'obstruction au relèvement des applications ainsi que l'obstruction au relèvement des homotopies.

Dans la dernière partie, nous développons une construction "+" des algèbres différentielles graduées sur une opérade de Koszul. Nous montrons que cette construction est unique à homotopie près. Par ailleurs, nous appliquons cette construction à $\mathrm{sl}(A)$ où A est une algèbre associative unitaire et $\mathrm{sl}(A)$ est le noyau de l'application $\mathrm{Tr} : \mathrm{gl}(A) \to A/[A,A]$. Comme $\mathrm{sl}(A)$ est une algèbre de Lie parfaite, nous pouvons faire sa construction "+" dans la catégorie des algèbres de Lie différentielles graduées, et déterminer $\pi_*(\mathrm{sl}(A)^+)$: c'est l'homologie cyclique réduite de A. Nous pouvons également construire $\mathrm{sl}(A)^+$ dans la catégorie des algèbres de Leibniz différentielles graduées et montrer que $\pi_*(\mathrm{sl}(A)^+)$ est l'homologie de Hochschild réduite de A.

Notations. Dans tout ce qui suit le symbole K désigne un corps commutatif de caractéristique nulle ; les espaces vectoriels sont relatifs à K. La catégorie des espaces vectoriels sur K est notée Vect_K. Le groupe des permutations sur n éléments est noté S_n.

Nous considérons par la suite des espaces vectoriels gradués positivement et inférieurement. Un espace vectoriel gradué V est *n-réduit* si $V_i = 0$, $\forall i < n$; on dira que V est *réduit* s'il est 1-réduit. La *suspension* d'un espace vectoriel gradué V est l'espace vectoriel gradué sV défini par $(sV)_n = V_{n-1}$.

Soit V un espace vectoriel gradué. Si V est muni d'une application $d : V \to V$ de degré -1 telle que $d^2 = 0$, alors on dit que c'est un espace vectoriel différentiel gradué ou un *complexe*. Dans ce cas là, nous désignons l'espace vectoriel des cycles $\mathrm{Ker}(d : V_r \to V_{r-1})$ par $Z_r(V)$ et l'espace vectoriel des bords $\mathrm{Im}(d : V_{r+1} \to V_r)$ par $B_r(V)$. L'homologie du complexe V est $H_*(V) = Z_*(V)/B_*(V)$. Un espace vectoriel différentiel gradué est dit *connexe* si $H_0(V) = 0$. Un morphisme de complexe est un *quasi-isomorphisme* s'il réalise un isomorphisme en homologie.

On gardera en mémoire que tout espace vectoriel peut être considéré comme espace vectoriel différentiel gradué concentré en degré 0 et de différentielle nulle, de même que toute algèbre peut-être considérée comme algèbre différentielle graduée.

1. Algèbres différentielles graduées sur une opérade

La notion d'opérade, introduite dans les années 70 pour les opérades topologiques [May], a pris son essor pour les opérades algébriques grâce à l'article de V. Ginzburg et M. Kapranov [Gi-K]. Une opérade est une structure algébrique codant un type d'algèbre. Se donner une opérade revient notamment à se donner toutes les opérations possibles sur x variables d'une algèbre d'un type donné ainsi que toutes les relations existant entre ces opérations. Par exemple, il existe des opérades $\mathcal{L}$ie, $\mathcal{A}$s, $\mathcal{C}$om, $\mathcal{L}$eib, etc..., pour lesquelles les algèbres sur ces opérades sont les algèbres de Lie, les algèbres associatives (non unitaires), les algèbres commutatives et associatives (non unitaires), les algèbres de Leibniz, etc...

Nous exposons dans cette section les définitions et résultats sur les opérades nécessaires aux sections suivantes. Pour plus de détail, nous renvoyons le lecteur aux articles [Gi-K, Lo5, Ge-J].

1.1. Algèbres et cogèbres sur une opérade

Il existe plusieurs définitions équivalentes des opérades que nous allons présenter dans ce paragraphe. L'une d'entre elles consiste à définir une opérade comme une monade dans la catégorie des S-modules. Nous définissons également les notions d'algèbre et de cogèbre sur une opérade.

1.1.1. S-modules. Un S-*module* $\mathcal{M}$ est une suite de S_n-modules $\mathcal{M}(n)$, pour $n \geq 0$. A tout S-module $\mathcal{M}$, nous associons un endofoncteur de Vect_K, noté $T(\mathcal{M}, -)$ et défini par

$$T(\mathcal{M}, V) = \bigoplus_{k \geq 0} (\mathcal{M}(k) \otimes_{S_k} V^{\otimes k}), \ \forall\ V \in \mathrm{Vect}_K,$$

où S_k opère sur $V^{\otimes k}$ par permutation des variables. La catégorie des S-modules sera notée $\mathrm{S} - \mathrm{mod}$.

La composée de deux de ces endofoncteurs est un endofoncteur de la même forme [J]. Plus précisément :

1.1.2. Proposition. *Il existe un bifoncteur associatif*

$$\circ\ : \mathrm{S} - \mathrm{mod} \times \mathrm{S} - \mathrm{mod} \to \mathrm{S} - \mathrm{mod}$$

appelé produit de composition tel que

$$T(\mathcal{M} \circ \mathcal{N}, -) \simeq T(\mathcal{M}, T(\mathcal{N}, -)). \qquad \square$$

Le S-module I défini par $I(n) = K$ si $n = 1$ et $I(n) = 0$ sinon, est une unité pour le produit de composition.

1.1.3. Opérade. Une *opérade* est un monoïde dans la catégorie $\mathrm{S}-\mathrm{mod}$. Plus précisément, une opérade consiste en la donnée d'un S-module $\mathcal{P}$ avec un produit associatif $\mu : \mathcal{P} \circ \mathcal{P} \to P$ et une unité $\eta : I \to \mathcal{P}$ commutant avec μ.

En fait, la structure de l'opérade est équivalente à la donnée d'applications, souvent appelées *produits*,

$$\mathcal{P}(n) \otimes \mathcal{P}(j_1) \otimes \cdots \otimes \mathcal{P}(j_n) \to \mathcal{P}(j_1 + \cdots + j_n)$$

et d'une unité $1 \in \mathcal{P}(1)$ satisfaisant les axiomes de May [May]. Par la suite nous noterons $\mu(\nu_1, \cdots, \nu_n)$ l'image de $\mu \otimes \nu_1 \otimes \cdots \otimes \nu_n$ par cette application.

Nous appellerons *opérade unitale* une opérade $\mathcal{P}$ telle que $\mathcal{P}(0) = 0$ et $\mathcal{P}(1) = K$.

D'après la proposition 1.1.2, la donnée d'une opérade $\mathcal{P}$ équivaut à la donnée d'une monade de la forme $T(\mathcal{P}, -)$ sur la catégorie $\mathrm{End}(\mathrm{Vect}_K)$. Une algèbre sur cette monade est appelée *$\mathcal{P}$-algèbre.*

1.1.4. Proposition. *Soit $\mathcal{P}$ une opérade. Une $\mathcal{P}$-algèbre A est un espace vectoriel muni d'applications S_n-équivariantes*

$$\mathcal{P}(n) \otimes A^{\otimes n} \to A$$

associatives par rapport au produit et telles que l'action de l'unité soit l'identité. □

Nous noterons $\mu(a_1, \cdots, a_n)$ l'image de $\mu \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n$ par cette application. Soit V un espace vectoriel, alors $T(\mathcal{P}, V)$ est la $\mathcal{P}$-algèbre libre engendrée par V. De plus, $\mathcal{P}(n)$ s'identifie en tant que S_n-module, à la partie n-multilinéaire de $T(\mathcal{P}, < x_1, \cdots, x_n >)$.

1.1.5. Remarque. Etant donné V un espace vectoriel, notons $\mathcal{E}nd_V$ l'opérade définie par $\mathcal{E}nd_V(n) = \mathrm{Vect}_K(V^{\otimes n}, V)$ munie de l'action naturelle de S_n ainsi que du produit d'opérade naturel. Alors, la donnée d'une $\mathcal{P}$-algèbre A équivaut à la donnée d'un morphisme d'opérades de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{E}nd_V$.

1.1.6. Exemples. Considérons $\mathcal{A}\mathrm{s}(x_1, \cdots, x_n)$ l'algèbre associative (non unitaire) libre engendrée par $x_1, \cdots, x_n$ et $\mathcal{A}\mathrm{s}(n)$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{A}\mathrm{s}(x_1, \cdots, x_n)$ engendré par les monômes contenant chaque x_i une et une seule fois ; alors $\mathcal{A}\mathrm{s}(n)$ est l'espace vectoriel engendré par les $x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(n)}$ pour $\sigma \in \mathrm{S}_n$ et il est ainsi muni d'une structure naturelle de S_n-module qui correspond à la représentation régulière. La famille $\mathcal{A}\mathrm{s} = \{\mathcal{A}\mathrm{s}(n), n \geq 0\}$ forme une opérade appelée opérade associative : les produits sont les applications

$$\mathcal{A}\mathrm{s}(l) \otimes \mathcal{A}\mathrm{s}(m_1) \otimes \cdots \otimes \mathcal{A}\mathrm{s}(m_l) \to \mathcal{A}\mathrm{s}(m_1 + \cdots + m_l)$$

qui aux monômes $\mu, \nu_1, \cdots, \nu_l$ associent le monôme obtenu en substituant dans μ les monômes ν_i aux éléments x_i. Une $\mathcal{A}\mathrm{s}$-algèbre n'est rien d'autre qu'une algèbre associative. De plus, l'algèbre associative libre sur un espace vectoriel V est donnée par

$$T(\mathcal{A}\mathrm{s}, V) = \bar{T}(V) = \bigoplus_{n=1}^{\infty} V^{\otimes n}.$$

Soit $\mathcal{C}\mathrm{om}(x_1, \cdots, x_n)$ l'algèbre commutative non unitaire libre engendrée par $x_1, \cdots, x_n$ et $\mathcal{C}\mathrm{om}(n)$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}\mathrm{om}(x_1, \cdots, x_n)$ engendré par les monômes contenant chaque x_i une et une seule fois ; alors $\mathcal{C}\mathrm{om}(n)$ est l'espace vectoriel engendré par $x_1 \cdots x_n$ qui est muni de la structure de S_n-module correspondant à la représentation triviale. Le produit définissant la structure d'opérade est le même que dans le cas de l'opérade $\mathcal{A}\mathrm{s}$. De plus, une $\mathcal{C}\mathrm{om}$-algèbre n'est rien d'autre qu'une algèbre associative et commutative non unitaire : le produit $\mathcal{C}\mathrm{om}(n) \otimes A^{\otimes n} \to A$ est donné par l'évaluation des polynômes. Par ailleurs, l'algèbre commutative libre engendrée par un espace vectoriel V est donnée par

$$T(\mathcal{C}\mathrm{om}, V) = \bar{S}(V) = \bigoplus_{n=1}^{\infty} (V^{\otimes n})_{\mathrm{S}_n}.$$

1.1.7. Idéal. Soit A une $\mathcal{P}$-algèbre. Un *idéal* de A est un sous-espace vectoriel I tel que

$$\mu(a_1, \cdots, a_{n-1}, s) \in I, \, \forall \mu \in \mathcal{P}(n), \, \forall a_i \in A, \, \forall s \in I.$$

Supposons l'opérade $\mathcal{P}$ unitale. Soit A^n l'image du produit

$$\bigoplus_{k \geq n} (\mathcal{P}(k) \otimes_{S_k} A^{\otimes k}) \to A.$$

Alors A^n est un idéal de A appelé *n-ième idéal d'augmentation*. Par exemple A^2 est l'ensemble des éléments de A qui s'écrivent comme produits d'éléments de A, appelé ensemble des éléments *décomposables* de A. L'espace vectoriel A/A^2, noté QA est appelé *module des indécomposables* de A.

Si A est une $\mathcal{P}$-algèbre libre engendrée par V, on observe que :

$$A^n = \bigoplus_{k \geq n} (\mathcal{P}(k) \otimes_{S_k} V^{\otimes k}) \qquad \text{et} \qquad QA \simeq V.$$

1.1.8. Coproduit. La catégorie des $\mathcal{P}$-algèbres est munie d'un coproduit noté $\vee$, dont on peut trouver une réalisation dans Fresse [Fr3] et nous avons l'isomorphisme

$$T(\mathcal{P}, V) \vee T(\mathcal{P}, W) \simeq T(\mathcal{P}, V \oplus W).$$

1.1.9. Cogèbre sur une opérade. Une *cogèbre* sur un opérade $\mathcal{P}$ est un espace vectoriel X muni de coproduits

$$\mathcal{P}(n) \otimes X \to X^{\otimes n},$$

équivariants par rapport à l'action de S_n et associatifs par rapport au produit de l'opérade. De plus, on suppose que l'unité de l'opérade agit comme l'identité. Nous écrivons l'image de $p \otimes v$ par ce coproduit, selon les notations de Sweedler :

$$p(v) = \sum v_{(1)} \otimes \cdots \otimes v_{(n)}.$$

Si $\mathcal{P}(n)$ est de dimension finie pour tout n, le dual linéaire du produit d'opérade

$$\mathcal{P}(n) \otimes \mathcal{P}(l_1) \otimes \cdots \otimes \mathcal{P}(l_n) \to \mathcal{P}(l_1 + \cdots + l_n)$$

induit un coproduit de $\mathcal{P}$-cogèbre sur

$$C(\mathcal{P}, V) = \bigoplus_{n \geq 0} (\mathcal{P}(n)^* \otimes V^{\otimes n})^{S_n}.$$

Nous obtenons ainsi la $\mathcal{P}$-cogèbre (co-)libre (co-)engendrée par V. Alors, une structure de $\mathcal{P}$-cogèbre sur X est spécifiée par un coproduit

$$X \to C(\mathcal{P}, X).$$

1.2. Opérades quadratiques

V. Ginzburg et M. Kapranov ont adapté la théorie de Koszul des algèbres associatives aux opérades. Ils définissent en particulier la notion d'opérade quadratique ainsi qu'une opération de dualité quadratique $\mathcal{P} \to \mathcal{P}^!$. L'objet de ce paragraphe est de rappeler ces diverses notions. Nous donnons de plus des exemples classiques d'opérades quadratiques et de leur dual associé.

1.2.1. Opérades libres. Le foncteur oubli de la catégorie des opérades dans la catégorie des S-modules admet un adjoint à gauche, noté $\mathcal{F}$. Pour tout S-module $\mathcal{M}$, l'opérade $\mathcal{F}(\mathcal{M})$ est *l'opérade libre* engendrée par $\mathcal{M}$. Plus précisément, il existe un morphisme de S-modules $\mathcal{M} \to \mathcal{F}(\mathcal{M})$ solution du problème universel suivant : pour tout morphisme de S-modules $\mathcal{M} \to \mathcal{N}$, où $\mathcal{N}$ est une opérade, il existe un unique morphisme d'opérades $\mathcal{F}(\mathcal{M}) \to \mathcal{N}$ qui fasse commuter le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{N} \\ \mathcal{F}(\mathcal{M}) \arrow[ur, dashed] & \end{tikzcd}$$

1.2.2. Idéal d'une opérade. Un *idéal* d'une opérade $\mathcal{P}$ est un sous-S-module J tel que le produit dans $\mathcal{P}$ est à valeurs dans J dès qu'une des variables est dans J. La famille des S_n-modules $\mathcal{P}(n)/J(n)$, pour $n \geq 0$, forme une opérade notée $\mathcal{P}/J$. L'*idéal engendré* par un sous-S-module R est le plus petit idéal contenant R ; il est noté (R). Remarquons que dans ce cas là, un morphisme d'opérades $\mathcal{P}/(R) \to \mathcal{Q}$ équivaut à un morphisme d'opérades $\mathcal{P} \to \mathcal{Q}$ qui s'annule sur R.

1.2.3. Opérade quadratique. Soit E un S_2-module, que nous considérons comme S-module concentré en degré 2. Une *opérade quadratique* est une opérade de la forme $\mathcal{F}(E)/(R)$, avec R un sous-S_3-module de $\mathcal{F}(E)(3)$. Remarquons que $\mathcal{F}(E)(2) = E$.

1.2.4. Opérade duale. Pour tout S_n-module M, notons $M^\vee$ le dual linéaire de M tensorisé par la représentation signature. Soit E un S_2-module. Alors, il existe un unique crochet de dualité

$$<,> : \mathcal{F}(E)(3) \otimes \mathcal{F}(E^\vee)(3) \to K$$

qui prolonge le crochet de dualité

$$<,> : E \otimes E^\vee \to K.$$

Pour tout sous-S_3-module R de $\mathcal{F}(E)(3)$, désignons par $R^\perp$ l'orthogonal de R par ce crochet de dualité. *L'opérade duale* d'une opérade quadratique $\mathcal{P} = \mathcal{F}(E)/(R)$ est par définition l'opérade quadratique $\mathcal{P}^! = \mathcal{F}(E^\vee)/(R^\perp)$.

1.2.5. Proposition. *Soit $\mathcal{P} = \mathcal{F}(E)/(R)$ une opérade quadratique. Si E est de dimension finie, alors on a $(\mathcal{P}^!)^! = \mathcal{P}$.* □

1.2.6. Exemples d'opérades quadratiques et de duaux. Beaucoup de catégories d'algèbres classiques sont des algèbres sur des opérades quadratiques. Nous nous proposons de donner une liste d'exemples non exhaustive, dans le cas où la dimension du S_2-module est 1 ou 2. Rappelons qu'une opérade est un objet décrivant les opérations d'un type d'algèbre donné.

L'opérade $\mathcal{C}$om. Cette opérade code les algèbres commutatives et associatives non unitaires. En particulier l'espace vectoriel des opérations que l'on peut faire sur deux variables est engendré par un élément, noté x_1x_2. En tant que S_2-module, il correspond à la représentation triviale. Par ailleurs, l'espace vectoriel $\mathcal{F}(\mathcal{C}\mathrm{om}(2))(3)$ est l'espace de toutes les opérations sur trois variables que l'on peut faire à partir de $\mathcal{C}\mathrm{om}(2)$, et donc il est engendré par $x_3(x_1x_2)$, $x_1(x_2x_3)$, $x_2(x_3x_1)$, où l'action de S_3 fait permuter les variables. Donc, en tant que S_3-module

$$\mathcal{F}(\mathcal{C}\mathrm{om}(2))(3) = \mathbf{1} \oplus \mathbb{V}_{\mathbf{2}},$$

où $\mathbf{1}$ désigne le S_3-module trivial et où $\mathbb{V}_2$ désigne la représentation irréductible de dimension 2. Il faut remarquer que les différentes représentations irréductibles de S_3 ne sont présentes ici qu'une seule fois, ce qui assure l'unicité de la décomposition en somme directe. A ce niveau là, nous avons uniquement décrit la commutativité des opérations. Cependant, il faut encore introduire l'associativité des opérations. L'espace vectoriel $R_{\mathcal{C}\mathrm{om}}$ engendré par $x_3(x_1x_2) - x_1(x_2x_3)$ et $x_1(x_2x_3) - x_2(x_3x_1)$ est un sous-S_3-module de $\mathcal{F}(\mathcal{C}\mathrm{om}(2))(3)$ correspondant à la représentation $\mathbb{V}_2$. Il est à présent évident que la donnée de $\mathcal{C}\mathrm{om}(2)$ et $R_{\mathcal{C}\mathrm{om}}$ suffit à décrire le type "algèbre commutative". L'opérade $\mathcal{C}$om est donc l'opérade quadratique

$$\mathcal{C}\mathrm{om} = \mathcal{F}(\mathbf{1})/(\mathbb{V}_{\mathbf{2}}).$$

Ceci nous permet de calculer le dual de cette opérade : $\mathbf{1}^\vee$ est la représentation signature, notée sgn, et puisque $\mathbb{V}_2^\perp$ est de dimension 1, on a $\mathbb{V}_2^\perp = \mathrm{sgn}$. Donc

$$\mathcal{C}\mathrm{om}^! = \mathcal{F}(\mathrm{sgn})/(\mathrm{sgn}).$$

L'opérade $\mathcal{L}$ie. Cette opérade code les algèbres de Lie, et il est évident que se donner une opération antisymétrique, ainsi que l'équivalent de la relation de Jacobi au niveau des opérations, suffit à décrire l'opérade $\mathcal{L}$ie. Donc $\mathcal{L}\mathrm{ie}(2)$ est engendré par l'opération $[x_1, x_2]$ et est la représentation signature de S_2. Par suite, le S_3-module $\mathcal{F}(\mathcal{L}\mathrm{ie}(2))(3)$ est la somme directe des deux représentations irréductibles sgn et $\mathbb{V}_2$. Par ailleurs, l'espace vectoriel $R_{\mathcal{L}\mathrm{ie}}$ engendré par $[x_3,[x_1,x_2]]+[x_1,[x_2,x_3]]+[x_2,[x_3,x_1]]$ est un sous-S_3-module de $\mathcal{F}(\mathcal{L}\mathrm{ie}(2))(3)$ correspondant à la représentation signature. Par conséquent

$$\mathcal{L}\mathrm{ie} = \mathcal{F}(\mathrm{sgn})/(\mathrm{sgn}).$$

En conclusion, nous avons montré que $\mathcal{C}\mathrm{om}^! = \mathcal{L}\mathrm{ie}$, et aussi que $\mathcal{L}\mathrm{ie}^! = \mathcal{C}\mathrm{om}$.

L'opérade $\mathcal{A}$s. Cette opérade code les algèbres associatives non unitaires. Il est clair que $\mathcal{A}\mathrm{s}(2)$ est engendré par deux éléments x_1x_2 et x_2x_1, et la transposition de S_2 agit en permutant ces deux éléments. Ainsi, $\mathcal{A}\mathrm{s}(2)$ est la représentation régulière de S_2. Par suite, le S_3-module $\mathcal{F}(\mathcal{A}\mathrm{s}(2))(3)$ est engendré par $x_i(x_jx_k)$ et $(x_ix_j)x_k$ où les indices i, j et k sont tous distincts et compris entre 1 et 3. Les relations d'associativité induisent un sous-S_3-module $R_{\mathcal{A}\mathrm{s}}$ de $\mathcal{F}(\mathcal{A}\mathrm{s}(2))(3)$, engendré par les éléments $x_i(x_jx_k)-(x_ix_j)x_k$. En utilisant le crochet de dualité, Ginzburg et Kapranov [Gi-K] montrent que l'opérade $\mathcal{A}$s est auto-duale.

L'opérade $\mathcal{L}$eib. Cette opérade code les algèbres de Leibniz. Remarquons que $\mathcal{L}\mathrm{eib}(2) = \mathcal{A}\mathrm{s}(2)$ en tant que S_2-module et que l'espace vectoriel $R_{\mathcal{L}\mathrm{eib}}$ est de dimension 6, engendré par les éléments $[x_i,[x_j,x_k]] - [[x_i,x_j],x_k] + [[x_i,x_k],x_j]$. De plus, il y a un isomorphisme de S_3-modules entre $\mathcal{A}\mathrm{s}(3)$ et $\mathcal{L}\mathrm{eib}(3)$. La différence entre ces deux opérades provient du plongement de R dans $\mathcal{F}(K[\mathrm{S}_2])(3)$. En utilisant le crochet de dualité, nous pouvons définir l'opérade $\mathcal{L}\mathrm{eib}^!$: une algèbre sur l'opérade $\mathcal{L}\mathrm{eib}^!$, appelée *algèbre de Lebiniz-dual*, est un espace vectoriel muni d'une opération, notée $\cdot$, et satisfaisant la relation

$$(x\cdot y)\cdot z = x\cdot(y\cdot z) + x\cdot(z\cdot y).$$

L'opérade $\mathcal{P}$ois. Cette opérade code les algèbres de Poisson. Une algèbre de Poisson est munie de deux opérations : un produit associatif et commutatif, noté $\cdot$, ainsi qu'un crochet de Lie $[-,-]$. A l'associativité et à la relation de Jacobi, s'ajoute la relation $[f\cdot g, h] = f\cdot[g,h] + [f,h]\cdot g$. Il est alors évident que $\mathcal{P}\mathrm{ois}(2)$ est un espace vectoriel de dimension 2 correspondant à la représentation régulière. Par ailleurs il n'est pas difficile de construire $R_{\mathcal{P}\mathrm{ois}}$. En utilisant le crochet de dualité, on peut montrer que l'opérade $\mathcal{P}$ois est auto-duale [Fo-M, M].

1.2.7. Algèbres sur une opérade quadratique. D'après la remarque 1.1.5, se donner une structure de $\mathcal{P}$-algèbre sur A revient à se donner un morphisme d'opérades de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{E}nd_A$. Mais si l'opérade $\mathcal{P}$ est quadratique, se donner un morphisme d'opérades de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{E}nd_A$ équivaut à se donner un morphisme de S_2-module $\phi : \mathcal{P}(2) \to \mathrm{Vect}_K(V^{\otimes 2}, V)$, tel que le morphisme d'opérades induit $\mathcal{F}(\mathcal{P}(2)) \to \mathcal{E}nd_A$ s'annule sur R.

1.3. Algèbres et cogèbres différentielles graduées

Les notions de $\mathcal{P}$-algèbres et $\mathcal{P}$-cogèbres graduées sont assez simples à mettre en place dès lors que nous avons défini ces notions en non gradué. Nous définissons dans ce paragraphe les notions de dérivations et de différentielles de $\mathcal{P}$-algèbres et de $\mathcal{P}$-cogèbres.

1.3.1. Espaces vectoriels différentiels gradués. Nous considérerons par la suite des espaces vectoriels gradués positivement et inférieurement. Donc les différentielles seront de degré -1. Un espace vectoriel gradué V est *n-réduit* si $V_i = 0$, $\forall i < n$; on dira que V est *réduit* s'il est 1-réduit.

Le tenseur gradué remplace le tenseur usuel et l'opérateur de symétrie est défini par

$$\begin{array}{ccc} U \otimes V & \to & V \otimes U \\ u \otimes v & \mapsto & (-1)^{|u||v|} v \otimes u. \end{array}$$

La différentielle de $U \otimes V$ est donnée par $d(u \otimes v) = du \otimes v + (-1)^{|u|} u \otimes dv$.

La *suspension* d'un espace vectoriel différentiel gradué V est l'espace vectoriel différentiel gradué

$$sV = Ke \otimes V$$

avec $|e| = 1$. Remarquons que nous avons l'isomorphisme de S_n-modules suivant

$$(sV)^{\otimes n} \simeq s^n \operatorname{sgn}_n \otimes V^{\otimes n}.$$

Soit $\mathcal{P}$ une opérade. Une $\mathcal{P}$-algèbre graduée est un espace vectoriel gradué A muni d'applications de degré 0 : $\mathcal{P}(n) \otimes A^{\otimes n} \to A$ satisfaisant les mêmes relations que dans le cas non gradué. Nous définissons de même une $\mathcal{P}$-cogèbre graduée.

1.3.2. Dérivation. Une *dérivation de $\mathcal{P}$-algèbre graduée* est une application $d : A \to A$ de degré -1 vérifiant

$$d\mu(a_1, \cdots, a_n) = \sum_{i=1}^{n} \pm \mu(a_1, \cdots, da_i, \cdots, a_n).$$

La $\mathcal{P}$-algèbre A est une *$\mathcal{P}$-algèbre différentielle graduée*, si elle est munie d'une dérivation d satisfaisant $d^2 = 0$.

Par la suite, toute $\mathcal{P}$-algèbre non graduée pourra être considérée comme une $\mathcal{P}$-algèbre graduée concentrée en degré 0 et de différentielle nulle.

1.3.3. Proposition. *Soit V un espace vectoriel gradué. Toute application linéaire $\phi : V \to T(\mathcal{P}, V)$ s'étend en une unique dérivation $\delta : T(\mathcal{P}, V) \to T(\mathcal{P}, V)$.* $\square$

1.3.4. Codérivation. Soit C une $\mathcal{P}$-cogèbre. Une *codérivation* de C est une application $d : C \to C$ de degré -1 vérifiant

$$dp(v) = \sum \pm v_{(1)} \otimes \cdots \otimes dv_{(i)} \otimes \cdots \otimes v_{(n)}.$$

La $\mathcal{P}$-cogèbre C est une *$\mathcal{P}$-cogèbre différentielle graduée*, si elle est munie d'une codérivation satisfaisant $d^2 = 0$.

1.3.5. Proposition. *Soit V un espace vectoriel gradué réduit. Toute application linéaire $\phi : C(\mathcal{P}, V) \to V$ s'étend en une unique codérivation $\delta : C(\mathcal{P}, V) \to C(\mathcal{P}, V)$.* $\square$

1.3.6. Algèbre quasi-libre. Une $\mathcal{P}$-algèbre différentielle graduée A est dite *quasi-libre*, si A est une $\mathcal{P}$-algèbre graduée libre. Plus précisément, A est de la forme $(T(\mathcal{P}, V), d)$ où V est un espace vectoriel gradué, et où la différentielle d n'est pas nécessairement induite par une différentielle sur V.

1.4. Complexe de Koszul et résolutions quasi-libres

Considérons une opérade quadratique $\mathcal{P}$ telle que $\mathcal{P}(n)$ soit de dimension finie pour tout n. Dans leur article, E. Getzler et J.D.S. Jones [Ge-J] définissent une paire de foncteurs adjoints entre la catégorie des $\mathcal{P}$-algèbres différentielles graduées $(\mathrm{dg}\,\mathcal{P} - \mathrm{Alg})$ et la catégorie des $\mathcal{P}^!$-cogèbres différentielles graduées réduites $(\mathrm{dg}\,\mathcal{P}^! - \mathrm{Cog}_0)$

$$C_{\mathcal{P}} : \mathrm{dg}\,\mathcal{P} - \mathrm{Alg} \leftrightarrows \mathrm{dg}\,\mathcal{P}^! - \mathrm{Cog}_0 : T_{\mathcal{P}}.$$

Nous rappelons dans ce paragraphe les définitions de ces foncteurs.

Un morphisme entre deux complexes est appelé *quasi-isomorphisme* s'il réalise un isomorphisme en homologie. Nous montrons que le foncteur $C_{\mathcal{P}}$ préserve les quasi-isomorphismes et que le foncteur $T_{\mathcal{P}}$ préserve les quasi-isomorphismes entre $\mathcal{P}^!$-cogèbres différentielles graduées 2-réduites. Lorsque l'opérade est de Koszul, comme par exemple les opérades $\mathcal{C}$om, $\mathcal{L}$ie [Gi-K], l'opérade $\mathcal{P}$ois [M] ainsi que les opérades $\mathcal{L}$eib et $\mathcal{L}\mathrm{eib}^!$ [Lo-P, Lo5, Li2], l'unité de l'adjonction est un quasi-isomorphisme. Le lecteur pourra se reporter à l'article de E. Getzler et J.D.S. Jones [Ge-J] pour de plus amples détails.

1.4.1. Construction du foncteur $\mathbf{C}_{\mathcal{P}}$. Soit (A, ∂) une $\mathcal{P}$-algèbre différentielle graduée. Nous définissons $C_{\mathcal{P}}(A)$ comme la $\mathcal{P}^!$-cogèbre graduée libre sur sA, munie d'une différentielle d somme d'une différentielle linéaire d_1 induite par ∂ et d'une différentielle quadratique d_2 induite par la structure de $\mathcal{P}$-algèbre sur A.

Plus précisément, soit $\phi\ : C(\mathcal{P}^!, sV) \to sV$ l'application linéaire définie par $\phi(sv) = -s\partial v$ sur la composante linéaire de $C(\mathcal{P}^!, sV)$ et nulle sur les autres composantes. Alors d_1 est l'unique codérivation prolongeant ϕ (voir 1.3.5).

Remarquons que la composante quadratique de $C(\mathcal{P}^!, sV)$, i.e. $(\mathcal{P}^!(2)^* \otimes (sV)^{\otimes 2})^{\mathrm{S}_2}$ est isomorphe à $\mathcal{P}(2) \otimes \mathrm{sgn}_2 \otimes_{\mathrm{S}_2} (sV)^{\otimes 2}$, d'après la définition de l'opérade duale et du fait que nous sommes en caractéritique nulle. En utilisant la règle des signes (voir 1.3.1), nous constatons que la composante quadratique de $C(\mathcal{P}^!, sV)$ est isomorphe à $\mathcal{P}(2) \otimes_{\mathrm{S}_2} s^2V^{\otimes 2}$. Définissons alors l'application linéaire $\psi\ : C(\mathcal{P}^!, sV) \to sV$ comme le produit $\mathcal{P}(2) \otimes_{\mathrm{S}_2} s^2V^{\otimes 2} \to sV$ sur la composante quadratique et nulle sur les autres composantes. Alors d_2 est l'unique codérivation prolongeant ψ (voir 1.3.5).

De plus, nous pouvons montrer que ces codérivations satisfont les égalités suivantes

$$d_1^2 = 0 \quad ; \quad d_2^2 = 0 \quad ; \quad d_1d_2 + d_2d_1 = 0.$$

En posant $C_{p,q} = (\mathcal{P}^!(p+1) \otimes_{\mathrm{S}_{p+1}} (sA)^{\otimes p+1})_{p+q}$, nous remarquons que

$$\begin{array}{rcccl} d_1 & : & C_{p,q} & \to & C_{p,q-1} \quad \text{et} \\ d_2 & : & C_{p,q} & \to & C_{p-1,q}, \end{array}$$

par conséquent nous sommes en présence d'un bicomplexe et $C_{\mathcal{P}}(A)$ n'est rien d'autre que le complexe total de ce bicomplexe.

1.4.2. Homologie opéradique. Soit A une $\mathcal{P}$-algèbre différentielle graduée. *L'homologie opéradique* de A est l'homologie de $C_{\mathcal{P}}(A)$ que l'on note $H_*^{\mathcal{P}}(A)$. C'est une $\mathcal{P}^!$-cogèbre graduée.

1.4.3. Lemme. *Le foncteur $C_{\mathcal{P}}$ préserve les quasi-isomorphismes.*

Démonstration. D'après les remarques faites dans la construction du foncteur $C_{\mathcal{P}}$, si l'on désigne par $\pi_*(A)$ l'homologie du complexe A, le terme E_1 du bicomplexe défini par $C_{\mathcal{P}}(A)$ est $C_{\mathcal{P}}(\pi_*(A))$, et la suite spectrale associée converge vers $H_*^{\mathcal{P}}(A)$. Un quasi-isomorphisme $\phi\ : A \to B$ induit un isomorphisme $\pi_*(\phi)\ : \pi_*(A) \to \pi_*(B)$, donc induit un isomorphisme entre les termes E_1 des suites spectrales associées ; par conséquent $C_{\mathcal{P}}(\phi)\ : C_{\mathcal{P}}(A) \to C_{\mathcal{P}}(B)$ est un quasi-isomorphisme. □

1.4.4. Construction du foncteur $\mathbf{T}_{\mathcal{P}}$. Soit (C, d) une $\mathcal{P}^!$-cogèbre différentielle graduée réduite. Nous définissons $T_{\mathcal{P}}(C)$ comme la $\mathcal{P}$-algèbre graduée libre sur $s^{-1}C$, munie d'une différentielle ∂ somme d'une différentielle linéaire ∂_1 induite par d et d'une différentielle quadratique ∂_2 induite par la structure de $\mathcal{P}^!$-cogèbre sur C. Plus précisément, ∂_1 est l'unique dérivation qui prolonge l'application linéaire $\phi\ : s^{-1}C \to$

$T(\mathcal{P}, s^{-1}C)$ définie par $\phi(s^{-1}c) = -s^{-1}dc$ (voir la proposition 1.3.3). Par ailleurs, en utilisant l'isomorphisme suivant (voir 1.4.1)

$$(\mathcal{P}^!(2)^* \otimes s^{-2}C^{\otimes 2})^{\mathrm{S}_2} \simeq (\mathcal{P}(2) \otimes (s^{-1}C)^{\otimes 2})_{\mathrm{S}_2},$$

nous construisons ∂_2 comme l'unique dérivation qui prolonge l'application linéaire ψ : $s^{-1}C \to T(\mathcal{P}, s^{-1}C)$ définie par la composante quadratique du coproduit

$$s^{-1}C \to (\mathcal{P}(2) \otimes s^{-2}C^{\otimes 2})_{\mathrm{S}_2}.$$

De plus ces dérivations satisfont les égalités suivantes

$$\partial_1^2 = 0 \quad ; \quad \partial_2^2 = 0 \quad ; \quad \partial_1\partial_2 + \partial_2\partial_1 = 0.$$

Donc $T_{\mathcal{P}}(C)$ définit un bicomplexe qui induit une suite spectrale, mais contrairement au foncteur $C_{\mathcal{P}}$ cette suite spectrale est du deuxième quadrant.

1.4.5. Lemme. *Le foncteur $T_{\mathcal{P}}$ préserve les quasi-isomorphismes entre $\mathcal{P}^!$-cogèbres différentielles graduées 2-réduites.*

Démonstration. Soit $\psi : (B, d) \to (B', d')$ un quasi-isomorphisme entre $\mathcal{P}^!$-cogèbres différentielles graduées 2-réduites. La filtration sur $T_{\mathcal{P}}$ définie par

$$F^p = \sum_{k \geq p} \mathcal{P}(k) \otimes_{\mathrm{S}_k} (s^{-1}B)^{\otimes k},$$

nous fournit un sous-complexe de $T_{\mathcal{P}}$ et nous obtenons le diagramme aux lignes exactes

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & F^{p+1} & \longrightarrow & F^p & \longrightarrow & F^p/F^{p+1} & \longrightarrow & 0 \\
 & & {\scriptstyle T_{\mathcal{P}}(\psi)}\downarrow & & & & \downarrow{\scriptstyle \overline{T_{\mathcal{P}}(\psi)}} & & \\
0 & \longrightarrow & F'^{p+1} & \longrightarrow & F'^p & \longrightarrow & F'^p/F'^{p+1} & \longrightarrow & 0.
\end{array}$$

Or, par hypothèse, $\overline{T_{\mathcal{P}}(\psi)}$ est un quasi-isomorphisme, donc si l'application $H(T_{\mathcal{P}}(\psi))$: $H(F^{p+1}) \to H(F'^{p+1})$ est un isomorphisme, alors il en est de même pour l'application $H(T_{\mathcal{P}}(\psi)) : H(F^p) \to H(F'^p)$. Mais B et B' sont 2-réduites, donc pour tout $k \leq p$, on a $H_k(F^{p+1}) = H_k(F'^{p+1}) = 0$. Ce qui nous permet de conclure. □

1.4.6. Théorème. *Si $\mathcal{P}$ est de Koszul, l'unité et la co-unité de l'adjonction sont des quasi-isomorphismes. En particulier, pour toute $\mathcal{P}$-algèbre différentielle graduée A, il existe une surjection qui est un quasi-isomorphisme, appelée résolution de Koszul :*

$$T_{\mathcal{P}}(C_{\mathcal{P}}(A)) \to A.$$ □

1.4.7. Exemples. L'existence de la paire de foncteurs adjoints, ainsi que celle de la résolution quasi-libre ont été montrées indépendemment de la notion d'opérade, pour un certain nombres d'opérades particulières. Nous en donnons une illustration.

L'opérade $\mathcal{A}$s. La paire de foncteurs adjoints entre la catégorie des algèbres associatives et celle des cogèbres associatives correspond à la construction bar et co-bar [Mo]. Si A est une algèbre associative non graduée, l'homologie $H_*^{\mathcal{A}\mathrm{s}}(A)$ est l'homologie de Hochschild pour les algèbres associatives non unitaires de A.

L'opérade $\mathcal{L}$ie. On retrouve les foncteurs $\mathcal{C}$ et $\mathcal{L}$ de Quillen [Qu3], ainsi que l'homologie de Chevalley-Eilenberg dans le cas non gradué.

L'opérade $\mathcal{C}$om. La résolution de Koszul coïncide avec la résolution de Schlessinger et Stasheff [Sc-St].

L'opérade $\mathcal{L}$eib. On retrouve les résultats du premier chapitre, en particulier les foncteurs $\mathcal{L}^!$ et $\mathcal{L}$, ainsi que l'homologie de Leibniz.

2. Structure de catégorie modèle

Nous montrons dans cette section que l'on peut munir la catégorie des algèbres différentielles graduées sur une opérade de Koszul d'une structure de catégorie modèle fermée au sens de Quillen [Qu1, D-S]. Les trois classes de morphismes que nous introduisons au paragraphe 2.2 sont les suivantes :

(i) les *équivalences faibles* sont les isomorphismes en homotopie (où l'homotopie d'une algèbre différentielle graduée est l'homologie du complexe sous-jacent),

(ii) les *fibrations* sont les surjections en degrés strictement positifs,

(iii) les *cofibrations* sont les morphismes ayant la propriété de relèvement à gauche par rapport aux fibrations acycliques.

Les paragraphes 2.3 à 2.5 sont la preuve que cette catégorie est une catégorie modèle. Le démonstration repose essentiellement sur deux points : la résolution de Koszul (cf. théorème 1.4.6) et l'existence d'un espace de chemins (voir 2.4.2). Dans le paragraphe 2.6, nous étudions l'homotopie des applications. Le paragraphe 2.7 est consacré à l'homologie de Quillen d'une algèbre sur une opérade.

Notations. Le symbole $\mathcal{C}$ désigne une catégorie quelconque. L'élément X pourra représenter selon le contexte, soit un objet de $\mathcal{C}$, soit le morphisme Id_X.

Dans la suite de la section, nous choisirons $\mathcal{P}$ une opérade de Koszul et noterons par $\mathrm{dg}\,\mathcal{P}-\mathrm{Alg}$ la catégorie des $\mathcal{P}$-algèbres différentielles graduées.

2.1. Notion de catégorie modèle

Nous rappelons dans ce paragraphe la définition d'une catégorie modèle.

2.1.1. Définition. Soient $i : A \to B$ et $p : X \to Y$ deux morphismes. On dit que le morphisme i a la *propriété de relèvement à gauche* par rapport à p (ou que le morphisme p a la *propriété de relèvement à droite* par rapport à i) si pour tout diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "u"] \arrow[d, "i"'] & X \arrow[d, "p"] \\ B \arrow[r, "v"] & Y, \end{tikzcd}$$

il existe un morphisme $h : B \to X$ tel que $hi = u$ et $ph = v$.

2.1.2. Rétraction. Un morphisme $f : X \to X'$ est une *rétraction* de $g : Y \to Y'$ s'il existe un diagramme

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & Y \arrow[r, "r"] \arrow[d, "g"'] & X \arrow[d, "f"'] \\ X' \arrow[r, "i'"] & Y' \arrow[r, "r'"] & X' \end{tikzcd}$$

avec $ri = X$ et $r'i' = X'$.

2.1.3. Définition. Une *catégorie modèle* est une catégorie $\mathcal{C}$ munie de trois classes de morphismes stables par composition et contenant l'identité,

(i) les équivalences faibles,
(ii) les fibrations et
(iii) les cofibrations,

qui satisfait aux axiomes CM1) à CM5).

Une *fibration acyclique* (resp. *cofibration acyclique*) est un morphisme qui est à la fois une équivalence faible et une fibration (resp. cofibration). Les axiomes sont les suivants :

CM1) la catégorie $\mathcal{C}$ est stable par limites et colimites finies ;
CM2) si f et g sont deux morphismes tels que gf soit défini, alors si deux de ces trois morphismes sont des équivalences faibles, le troisième l'est aussi ;
CM3) si f est une rétraction de g et g est une fibration (resp. une cofibration, resp. une équivalence faible), alors f l'est aussi ;
CM4) (i) les cofibrations ont la propriété de relèvement à gauche par rapport aux fibrations acycliques ;
(ii) les fibrations ont la propriété de relèvement à droite par rapport aux cofibrations acycliques ;
CM5) (i) tout morphisme f admet une factorisation $f = pi$ telle que p soit une fibration acyclique et i une cofibration ;
(ii) tout morphisme f admet une factorisation $f = pi$ telle que p soit une fibration et i une cofibration acyclique.

Remarquons que cette définition est celle d'une catégorie modèle fermée dans la terminologie de Quillen.

2.2. Structure de catégorie modèle des algèbres différentielles graduées sur une opérade

Soit $\mathcal{P}$ une opérade de Koszul. Nous donnons dans ce paragraphe la définition des trois classes de morphismes permettant de construire une structure de catégorie modèle sur la catégorie $\mathrm{dg}\,\mathcal{P} - \mathrm{Alg}$.

Rappelons qu'une $\mathcal{P}$-algèbre différentielle graduée A est une $\mathcal{P}$-algèbre graduée inférieurement et positivement munie d'une dérivation $\delta : A \to A$ de degré -1, telle que $\delta^2 = 0$ (voir 1.3.2).

2.2.1. Homotopie. Soit A une $\mathcal{P}$-algèbre différentielle graduée. *L'homotopie* de A, notée $\pi_*(A)$, est l'homologie du complexe sous-jacent.

Nous utilisons cette terminologie afin de distinguer l'homologie du complexe sous-jacent de l'homologie opéradique définie en 1.4.2. De plus, elle nous permet de faire le lien avec le langage de l'homotopie rationnelle classique que nous utilisons dans la troisième partie.

2.2.2. Théorème. *La catégorie des $\mathcal{P}$-algèbres différentielles graduées munie des trois classes de morphismes suivantes :*

(i) les équivalences faibles sont les isomorphismes en homotopie,

(ii) les fibrations sont les surjections en degrés strictement positifs,

(iii) les cofibrations sont les morphismes ayant la propriété de relèvement à gauche par rapport aux fibrations acycliques,

est une catégorie modèle.

Il est évident que ces trois classes de morphismes sont stables par composition et contiennent l'identité.

Nous savons que l'axiome CM1) est vérifié (voir 1.1.8) et il n'est pas difficile de montrer que les axiomes CM2) et CM3) le sont également. L'axiome CM4,i) est vrai par définition.

Les paragraphes suivants sont consacrés à la démonstration de ce théorème. Dans le paragraphe 2.3, nous donnons une caractérisation effective des cofibrations ainsi que la preuve de CM5,i). Dans le paragraphe 2.4, nous définissons un espace de chemins canonique et vérifions l'axiome CM5,ii). Enfin, nous donnons une caractérisation des cofibrations acycliques dans le paragraphe 2.5 et montrons l'axiome CM4,ii).

2.3. Caractérisation des cofibrations

Pour décrire une catégorie modèle, bien qu'il suffise de décrire soit les équivalences faibles et les fibrations soit les équivalences faibles et les cofibrations, il est utile en général d'avoir une description complète des trois classes de morphismes. Nous connaissons déjà les équivalence faibles et les fibrations pour la catégorie $\mathrm{dg}\,\mathcal{P}-\mathrm{Alg}$; nous montrons dans ce paragraphe qu'une cofibration est une rétraction d'un morphisme quasi-libre (voir proposition 2.3.5).

Par ailleurs, nous montrons que tout morphisme $f\ : A \to B$ admet une factorisation $f = pi$ telle que p soit une fibration acyclique et i soit un morphisme quasi-libre. Cela nous permet alors de vérifier l'axiome CM5,i).

2.3.1. Morphisme quasi-libre. Soit $i\ : A \to B$ un morphisme de $\mathcal{P}$-algèbres différentielles graduées. Le morphisme i est *quasi-libre* s'il existe un sous-espace vectoriel V de B (non nécessairement stable par la différentielle) tel que le morphisme de $\mathcal{P}$-algèbres graduées induit $A \vee T(\mathcal{P}, V) \to B$ soit un isomorphisme.

En particulier, le morphisme $0 \to B$ est quasi-libre si et seulement si la $\mathcal{P}$-algèbre B est quasi-libre (voir définition 1.3.6).

2.3.2. Proposition. *Un morphisme quasi-libre a la propriété de relèvement à gauche par rapport aux fibrations acycliques, donc c'est une cofibration.*

Démonstration. Soit $i : A \to B$ un morphisme quasi-libre avec $B = A \vee T(\mathcal{P}, V)$. Utilisons la filtration squelettale de l'espace vectoriel gradué V, $\mathrm{sk}_r V = \bigoplus_{i \geq 0}^{r} V_i$, et notons

$$\mathrm{sk}_r B = A \vee T(\mathcal{P}, \mathrm{sk}_r V).$$

Remarquons que l'inclusion $\mathrm{sk}_{r-1} B \hookrightarrow \mathrm{sk}_r B$ est un morphisme quasi-libre et puisque B est la colimite sur r des $\mathrm{sk}_r B$, il suffit de montrer que cette inclusion a la propriété de relèvement à gauche par rapport aux fibrations acycliques. Remarquons également que la différentielle envoie V_r dans $\mathrm{sk}_{r-1} B$. Soit $p : X \to Y$ une fibration acyclique. Le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{sk}_{r-1} B \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook] & X \arrow[d, "p"] \\
\mathrm{sk}_r B \arrow[r, "g"] & Y
\end{tikzcd}$$

admet un relèvement $h : \mathrm{sk}_r B \to X$ si pour tout v, élément d'une base de V_r, il existe x dans X_r tel que : $p(x) = g(v)$ et $dx = f(dv)$. En d'autres termes, le diagramme précédent admet un relèvement, s'il existe un morphisme d'espaces vectoriels de V_r dans X_r qui fait commuter le diagramme

$$\begin{tikzcd}
V_r \arrow[d, "d"] \arrow[rr, dashed] \arrow[rrr, bend left, "g"] & & X_r \arrow[r, "p"] \arrow[d, "d"] & Y_r \arrow[d, "d"] \\
Z_{r-1}\,\mathrm{sk}_{r-1} B \arrow[rr, "f"] & & Z_{r-1}X \arrow[r, "p"] & Z_{r-1}Y,
\end{tikzcd}$$

où l'on note $Z_r(-)$ l'ensemble des cycles d'un espace vectoriel différentiel gradué. Or ce morphisme existe si l'application $X_r \to Z_{r-1}X \times_{Z_{r-1}Y} Y_r$ est surjective. Le lemme suivant assure la surjectivité de cette application. □

2.3.3. Lemme. *Si $p : X \to Y$ est une fibration acyclique, alors p est surjective en tous degrés et pour tout $r \geq 0$, l'application $(d, p) : X_r \to Z_{r-1}X \times_{Z_{r-1}Y} Y_r$ est surjective.*

Démonstration. Supposons $r = 0$. Comme p est une équivalence faible, pour tout $y \in Y_0$, il existe $x \in X_0$ et $z \in Y_1$ tels que $y = p(x) + d(z)$. Puisque l'application p est une fibration, elle est surjective en degré 1, donc il existe $t \in X_1$ tel que $z = p(t)$. Par suite, p est surjective en degré 0.

Supposons $r > 0$. Comme p est une équivalence faible, son noyau est acyclique. Soit (x, y) un élément de $Z_{r-1}X \times_{Z_{r-1}Y} Y_r$. Par hypothèse nous avons les égalités suivantes : $dx = 0$ et $dy = p(x)$. Or il existe $x' \in X_r$ tel que $y = p(x')$, puisque p est surjective en degré r. Nous obtenons ainsi par différentiation, que $dx' - x$ appartient à $Z_{r-1}(\mathrm{Ker}\, p)$; donc, en utilisant l'acyclicité de $\mathrm{Ker}\, p$, il existe $z \in (\mathrm{Ker}\, p)_r$ tel que $dx' - x = dz$. Par conséquent $d(x' - z) = x$ et $p(x' - z) = px' = y$. □

2.3.4. Proposition. *Tout morphisme de $\mathcal{P}$-algèbres différentielles graduées f admet une factorisation de la forme $f = pi$, où p est une fibration acyclique et i est un morphisme quasi-libre.*

Cette proposition, ainsi que la proposition 2.3.2 nous permet donc de vérifier l'axiome CM5,i).

Démonstration. D'après le théorème 1.4.6, pour toute $\mathcal{P}$-algèbre différentielle graduée A, il existe une fibration acyclique

$$T_{\mathcal{P}}C_{\mathcal{P}}(A) \to A.$$

Soit X une $\mathcal{P}$-algèbre différentielle graduée fixée. En utilisant la notion d'opérade enveloppante $U_{\mathcal{P}}(X)$ (voir [Ge-J] ou [Fr1]), nous pouvons montrer que la catégorie des morphismes de $X \to A$ est équivalente à la catégorie des $U_{\mathcal{P}}(X)$-algèbres. Puis en utilisant la bar-résolution des opérades [Ge-J], nous construisons une fibration acyclique $F \to A$ où F est quasi-libre dans la catégorie des $U_{\mathcal{P}}(X)$-algèbres ; ceci revient à dire que le morphisme $X \to F$ est quasi-libre. □

Pour conclure, nous donnons une caractérisation explicite des cofibrations.

2.3.5. Proposition. *Un morphisme de $\mathcal{P}$-algèbres différentielles graduées est une cofibration si et seulement si c'est une rétraction d'un morphisme quasi-libre.*

Démonstration. D'après la proposition 2.3.2 ainsi que l'axiome CM3) vérifié, nous savons qu'une rétraction d'un morphisme quasi-libre est une cofibration. Montrons la réciproque.

Soit $f : A \to B$ une cofibration. D'après la proposition 2.3.4, il existe une factorisation de f de la forme $f = pi$ où $i : A \to F$ est un morphisme quasi-libre et $p : F \to B$ est une fibration acyclique. Comme f est une cofibration, nous pouvons choisir un relèvement $h : B \to F$ dans le diagramme

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & F \arrow[d, "p"] \\ B \arrow[r, "="'] \arrow[ur, dashed, "h"] & B. \end{tikzcd}$$

Alors le diagramme

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "="] \arrow[d, "f"'] & A \arrow[r, "="] \arrow[d, "i"'] & A \arrow[d, "f"'] \\ B \arrow[r, "h"] & F \arrow[r, "p"] & B \end{tikzcd}$$

prouve que f est une rétraction de i. □

2.4. Espaces de chemins

L'objet de ce paragraphe est de vérifier l'axiome CM5,ii). Dans ce but, nous avons besoin d'un espace de chemins particulier, que nous appellerons *l'espace de chemins canonique*. Rappelons tout d'abord la définition d'un espace de chemins [Qu1, D-S]).

2.4.1. Définition. Soit X un objet de la catégorie $\mathcal{C}$. Un *espace de chemins* pour X est la donnée d'un objet X', d'une équivalence faible $\sigma : X \to X'$ et d'un morphisme $\rho : X' \to X \times X$ satisfaisant l'égalité $\rho\sigma = (X, X)$. Un *bon espace de chemins* est un espace de chemins pour lequel ρ est une fibration. Deux morphismes $f, g : A \to X$ sont dits *homotopes à droite* s'il existe un espace de chemins X' pour X ainsi qu'un morphisme $H : A \to X'$ tels que l'on ait $\rho H = (f, g)$.

2.4.2. Définition de l'espace de chemins canonique. Soit I l'algèbre commutative différentielle graduée unitaire libre sur deux générateurs : t en degré 0 et dt en degré -1. La différentielle $d : I \to I$ est donnée par $d(t) = dt$ et $d(dt) = 0$. Le corps K est muni d'une structure d'algèbre commutative différentielle graduée unitaire. Notons $s_0 : K \to I$ l'inclusion canonique et $p_0, p_1 : I \to K$ les morphismes d'algèbres commutatives différentielles graduées définis par

$$\begin{aligned} p_0(\phi(t, dt)) &:= \phi(0, 0), \\ p_1(\phi(t, dt)) &:= \phi(1, 0), \end{aligned}$$

pour tout $\phi(t, dt) \in I$. Il est clair que $H_*(I) = K$ et que s_0 est un quasi-isomorphisme. On a aussi : $p_0 s_0 = p_1 s_0 = K$.

Soit X une $\mathcal{P}$-algèbre différentielle graduée. Nous pouvons munir $X \otimes I$ d'une structure de $\mathcal{P}$-algèbre différentielle graduée de la manière suivante :

(i) soient $\mu \in \mathcal{P}(n)$ et $x_i \otimes \alpha_i \in X \otimes I$ pour $1 \leq i \leq n$; nous définissons le produit $\mu(x_1 \otimes \alpha_1, \cdots, x_n \otimes \alpha_n)$ par $\epsilon\, \mu(x_1, \cdots, x_n) \otimes \alpha_1 \cdots \alpha_n$, où ϵ est le signe de Koszul ;

(ii) la différentielle est la différentielle classique d'un produit tensoriel de deux espaces vectoriels différentiels gradués.

Cet objet factorise le morphisme (X, X) par le diagramme

$$X \xrightarrow{X \otimes s_0} X \otimes I \underset{X \otimes p_1}{\overset{X \otimes p_0}{\rightrightarrows}} X.$$

Comme $H_*(I)$ est trivial, il est clair que $X \otimes s_0$ est une équivalence faible ; de plus, le morphisme $p = (X \otimes p_0, X \otimes p_1)$ est surjectif. Nous définissons *l'espace de chemins canonique* X^I par les relations suivantes :

$$(X^I)_i = \begin{cases} 0, & \text{si } i < 0, \\ \mathrm{Ker}\big(d : (X \otimes I)_0 \to (X \otimes I)_{-1}\big), & \text{si } i = 0, \\ (X \otimes I)_i, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Les morphismes induits nous donnent un diagramme

$$X \xrightarrow{s_0^X} X^I \underset{p_1^X}{\overset{p_0^X}{\rightrightarrows}} X,$$

et il est aisé de vérifier que X^I est un bon espace de chemins. De plus les morphismes $p_0^X, p_1^X : X^I \to X$ sont des équivalences faibles.

S'il n'y a pas d'ambiguité, nous désignerons les morphismes s_0^X, p_0^X et p_1^X par s_0, p_0 et p_1.

2.4.3. Démonstration de CM5,ii). Soit $f : X \to Y$ un morphisme de $\mathcal{P}$-algèbres différentielles graduées. Le produit fibré

$$\begin{array}{ccc} X \times_Y Y^I & \xrightarrow{\mathrm{pr}_2} & Y^I \\ \mathrm{pr}_1 \downarrow & & \downarrow p_0 \\ X & \underset{f}{\longrightarrow} & Y \end{array}$$

nous donne une factorisation de f, de la forme

$$X \xrightarrow{j=(X,s_0 f)} X \times_Y Y^I \xrightarrow{q=p_1\,\mathrm{pr}_2} Y.$$

D'après ce qui a été vu précédemment, nous constatons que j est une équivalence faible et que q est une fibration. D'après CM5,i) (vérifié dans le paragraphe 2.3), le morphisme j se factorise en $j = pi$ où p est une fibration acyclique et i est une cofibration. Or le morphisme j est une équivalence faible, donc i est une cofibration acyclique. En conséquence, le morphisme f se factorise en $f = (qp)i$, où i est une cofibration acyclique et qp est une fibration. □

2.5. Caractérisation des cofibrations acycliques

Le but de ce paragraphe est de donner une caractérisation des cofibrations acycliques, ce qui nous permet de vérifier l'axiome CM4,ii) et par la même d'achever la démonstration du théorème 2.2.2. Nous montrons dans le lemme 2.5.4, qu'une cofibration acyclique est une rétraction par déformation forte.

2.5.1. Lemme. *Soit $f : X \to Y$ une fibration. Alors le morphisme*

$$X^I \xrightarrow{(p_0,f^I)} X \times_Y Y^I$$

est une fibration acyclique.

Démonstration. Soit $a = (x, f(x) \otimes 1 + \sum_{i\geq 1} y_i \otimes t^i + \sum_{i\geq 0} z_i \otimes t^i dt)$ un élément de $X \times_Y Y^I$. Supposons que le degré de y_i est $d > 0$ et celui de z_i est $d+1$. Comme f est surjective en degrés > 0, il existe x_i, $i > 0$ et u_i, $i \geq 0$, éléments de X tels que : $f(x_i) = y_i$ et $f(u_i) = z_i$. Par conséquent, l'élément $x \otimes 1 + \sum_{i\geq 1} x_i \otimes t^i + \sum_{i\geq 0} u_i \otimes t^i dt$ est un antécédent de a par le morphisme (p_0, f^I), ce qui prouve que ce morphisme est une fibration.

Il n'est pas difficile de constater que $\mathrm{pr}_1 : X \times_Y Y^I \to X$ est une équivalence faible. Mais la composition $\mathrm{pr}_1 \circ (p_0, f^I)$ est égale au morphisme p_0 qui est une équivalence faible. Donc, nous déduisons de l'axiome CM2) que (p_0, f^I) est une équivalence faible. □

2.5.2. Définition. Un morphisme $i : A \to B$ de $\mathcal{P}$-algèbres différentielles graduées est une rétraction par déformation forte s'il existe des morphismes $r : B \to A$ et $h : B \to B^I$ tels que

$$(i)\quad ri = A, \qquad (ii)\quad p_0 h = ir \qquad (iii)\quad p_1 h = B, \qquad (iv)\quad hi = s_0 i.$$

2.5.3. Lemme. *Les cofibrations qui sont des rétractions par déformation forte ont la propriété de relèvement à gauche par rapport aux fibrations.*

Démonstration. Le problème est de trouver un relèvement du diagramme

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & X \arrow[d, "q"] \\ B \arrow[r, "g"'] \arrow[ur, dashed, "l"] & Y \end{tikzcd}$$

où i est une cofibration et une rétraction par déformation forte et q une fibration. Soit r et h les morphismes de la définition 2.5.2. Comme le morphisme q est une fibration, d'après le lemme 2.5.1, le morphisme $(p_0^X, q^I) : X^I \to X \times_Y Y^I$ est une fibration acyclique. Ainsi le diagramme

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "s_0^X f"] \arrow[d, "i"'] & X^I \arrow[d, "{(p_0^X, q^I)}"] \\ B \arrow[r, "{(fr, g^I h)}"'] \arrow[ur, dashed, "H"] & X \times_Y Y^I \end{tikzcd}$$

admet un relèvement H, puisque i est une cofibration.

Vérifions que le morphisme $l = p_1^X H$ est une solution au problème de relèvement :
(i) $(p_1^X H)i = p_1^X s_0^X f = Xf = f$,
(ii) $q(p_1^X H) = p_1^Y q^I H = p_1^Y g^I h = g p_1^B h = gB = g$. □

2.5.4. Lemme. *Une cofibration acyclique est une rétraction par déformation forte.*

Démonstration. Soit $i\ : A \to B$ une cofibration acyclique. Considérons la factorisation $i = qj$ vue dans la démonstration 2.4.3 :

$$A \xrightarrow{j=(A,s_0 i)} A \times_B B^I \xrightarrow{q=p_1\,\mathrm{pr}_2} B.$$

Puisque les morphismes j et i sont des équivalences faibles et que le morphisme q est une fibration, alors q est une fibration acyclique. Donc il existe un relèvement $s = (r, h)$, avec $r\ : B \to A$ et $h\ : B \to B^I$, dans le diagramme

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "j"] \arrow[d, "i"'] & A \times_B B^I \arrow[d, "q"] \\ B \arrow[r, "="] \arrow[ur, dashed, "s"] & B. \end{tikzcd}$$

Nous obtenons alors

(i) $ri = \mathrm{pr}_1\, si = \mathrm{pr}_1\, j = A$,

(ii) $p_0 h = ir$ par définition d'un morphisme dans un produit fibré,

(iii) $p_1 h = p_1\, \mathrm{pr}_2\, s = qs = B$ et

(iv) $hi = \mathrm{pr}_2\, si = \mathrm{pr}_2\, j = s_0 i$.

D'après la définition 2.5.2, ceci nous prouve que le morphisme i est une rétraction par déformation forte. □

2.5.5. Démonstration de CM4,ii). D'après le lemme 2.5.3, les fibrations ont la propriété de relèvement à droite par rapport aux cofibrations qui sont des rétractions par déformation forte. Mais les cofibrations acycliques sont des rétractions par déformation forte (lemme 2.5.4). Donc les fibrations ont la propriété de relèvement à droite par rapport aux cofibrations acycliques. □

En conclusion, nous avons établi que la catégorie $\mathrm{dg}\,\mathcal{P} - \mathrm{Alg}$ est une catégorie modèle. Remarquons que tout élément A de cette catégorie est *fibrant*, c'est-à-dire que le morphisme $A \to 0$ est une fibration.

2.6. Homotopie des applications et modèles cofibrants

Pour étudier l'homotopie des applications, nous utilisons un opérateur d'intégration analogue à celui construit par P.A. Griffiths et J.W. Morgan [Gr-M] pour les algèbres commutatives, qui nous permet de montrer que si deux morphismes sont homotopes via l'espace de chemins canonique, alors il existe une homotopie de chaînes entre eux. Nous montrons également que pour toute $\mathcal{P}$-algèbre différentielle graduée cofibrante A, si deux morphismes de A dans B sont homotopes, alors ils sont homotopes via l'espace de chemins canonique.

Enfin, nous définissons ce qu'est un modèle cofibrant et montrons que tout morphisme entre deux $\mathcal{P}$-algèbres différentielles graduées admet un relèvement à homotopie près entre leur modèle cofibrant (voir proposition 2.6.7).

2.6.1. Intégration d'une homotopie. Soient $\int_0^1 : B^I \to B$ et $\int_0^t : B^I \to B^I$ les deux opérateurs linéaires de degré 1 définis par d'une part, $\int_0^1 b \otimes t^i = 0$ et $\int_0^1 b \otimes t^i dt = (-1)^{|b|}\frac{b}{i+1}$, et d'autre part $\int_0^t b \otimes t^i = 0$ et $\int_0^t b \otimes t^i dt = (-1)^{|b|} b \otimes \frac{t^{i+1}}{i+1}$.

Nous obtenons les égalités suivantes par calcul immédiat : soit $\beta \in B^I$ et $H : A \to B^I$ une homotopie entre f et g, alors

$$d\int_0^t \beta + \int_0^t d\beta = \beta - p_0^B \beta \otimes 1\ ;$$
$$d\int_0^1 H(a) + \int_0^1 dH(a) = g(a) - f(a).$$

De la dernière identité, nous déduisons

2.6.2. Lemme. *Soit $H : A \to B^I$ une homotopie entre f et g, alors $\int_0^1 H$ est une homotopie de chaînes entre f et g.* □

2.6.3. Lemme. *Soit A une $\mathcal{P}$-algèbre différentielle graduée cofibrante. Deux morphismes $f, g : A \to B$ sont homotopes à droite si et seulement si ils sont homotopes pour l'espace de chemins B^I (voir définition 2.4.2).*

Démonstration. Soit $h : A \to B'$ une homotopie droite entre f et g. Comme B' est un espace de chemins, il existe des morphismes σ et ρ tels que le diagramme

$$B \xrightarrow{\sigma} B' \xrightarrow{\rho} B \times B$$

factorise (B, B). Par définition de h, nous avons : $\rho h = (f, g)$.

D'après l'axiome CM5,ii), le morphisme σ admet une factorisation $\sigma = qi$ où $i : B \to F$ est une cofibration et $q : F \to B'$ est une fibration acyclique. Le morphisme σ étant une équivalence faible, il en est de même pour i. Puisque $p : B^I \to B \times B$ est une fibration, nous pouvons choisir un relèvement s' dans le diagramme

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "s_0"] \arrow[d, "i"'] & B^I \arrow[d, "p"] \\ F \arrow[r, "\rho q"'] \arrow[ur, dashed, "s'"] & B \times B. \end{tikzcd}$$

De plus, comme q est une fibration acyclique et que A est cofibrant, nous pouvons choisir un relèvement h' dans le diagramme

$$\begin{tikzcd} & F \arrow[d, "q"] \\ A \arrow[r, "h"'] \arrow[ur, dashed, "h'"] & B'. \end{tikzcd}$$

Posons $l = s'h'$ et vérifions que l est une homotopie entre f et g via l'espace de chemins B^I :

$$pl = ps'h' = \rho qh' = \rho h = (f, g). \qquad \square$$

2.6.4. Modèle cofibrant. Soit A une $\mathcal{P}$-algèbre différentielle graduée. Un *modèle cofibrant* de A est un objet cofibrant F muni d'une équivalence faible $F \to A$.

L'axiome CM5,i) nous assure l'existence d'un tel objet. En fait, à toute $\mathcal{P}$-algèbre différentielle graduée A, nous pouvons associer un modèle cofibrant F_A avec une fibration $F_A \to A$ et cette construction est fonctorielle à homotopie près [Qu1, D-S]. Plus précisément :

2.6.5. Proposition. *Soit $F_A \to A$ (resp. $F_B \to B$) une fibration acyclique avec F_A (resp. F_B) cofibrant. Pour tout morphisme $f : A \to B$ il existe un morphisme $\tilde{f} : F_A \to F_B$ tel que le diagramme*

$$\begin{tikzcd} F_A \arrow[r, dashed, "\tilde{f}"] \arrow[d] & F_B \arrow[d] \\ A \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd}$$

commute. De plus, le morphisme $\tilde{f}$ est unique à homotopie près. $\square$

Cependant, il nous est utile d'avoir une proposition analogue à la précédente, sans supposer que les morphismes $F_A \to A$ et $F_B \to B$ sont des fibrations. Le résultat de la proposition en est alors affaibli, à savoir que le diagramme devient seulement commutatif à homotopie près (voir proposition 2.6.7). A cet effet, nous montrons tout d'abord un lemme plus général.

2.6.6. Lemme. *Soit $f : A \to B$ une équivalence faible. Tout morphisme $g : X \to B$ avec X cofibrant factorise par A à homotopie près. Plus précisément, il existe un morphisme $\phi : X \to A$ tel que $f\phi$ soit homotope à g.*

Démonstration. Considérons le produit fibré

$$\begin{tikzcd} A \times_B B^I \arrow[r, "\mathrm{pr}_2"] \arrow[d, "\mathrm{pr}_1"'] & B^I \arrow[d, "p_0"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

ainsi que la factorisation de f vue en 2.4.3

$$A \xrightarrow{j=(A, s_0 f)} A \times_B B^I \xrightarrow{q = p_1 \,\mathrm{pr}_2} B,$$

où j est une équivalence faible et q une fibration. Comme f est une équivalence faible, le morphisme q l'est aussi par l'axiome CM2. Ainsi le diagramme

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] \arrow[d] & A \times_B B^I \arrow[d, "q"] \\ X \arrow[r, "g"'] \arrow[ur, dashed, "s"] & B \end{tikzcd}$$

admet un relèvement $s = (\phi, H)$. Or l'image de s est incluse dans $A \times_B B^I$, donc $p_0 H = f\phi$. De plus, on a : $p_1 H = p_1 \operatorname{pr}_2 s = qs = g$. □

2.6.7. Proposition. *Soit $F_A \to A$ (resp. $F_B \to B$) une équivalence faible avec F_A (resp. F_B) cofibrant. Pour tout morphisme $f : A \to B$ il existe un morphisme $\tilde{f} : F_A \to F_B$ tel que le diagramme*

$$\begin{tikzcd} F_A \arrow[r, dashed, "\tilde{f}"] \arrow[d] & F_B \arrow[d] \\ A \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd}$$

commute à homotopie près.

Démonstration. Il suffit de considérer l'application $u_B : F_B \to B$ qui est une équivalence faible avec F_A comme objet cofibrant et d'appliquer le lemme 2.6.6. □

2.7. Homologie de Quillen

La théorie des catégories modèles nous permet de définir l'homologie des objets de la catégorie, appelée *homologie de Quillen*. Nous montrons que celle-ci coïncide, à une suspension près, avec l'homologie opéradique. Rappelons tout d'abord la notion d'indécomposables vue en 1.1.7 :

2.7.1. Indécomposables. Soit $(-)_+$ le foncteur de la catégorie des K-espaces vectoriels différentiels gradués dans la catégorie $\mathrm{dg}\,\mathcal{P} - \mathrm{Alg}$ qui à V associe la $\mathcal{P}$-algèbre V_+ triviale. Ce foncteur admet un adjoint à gauche, le foncteur des *indécomposables* Q, que l'on peut définir dans le cadre d'une opérade unitale comme le conoyau de l'application

$$\bigoplus_{k \geq 2} (\mathcal{P}(k) \otimes_{S_k} A^{\otimes k}) \to A.$$

Remarquons que si $A = T(\mathcal{P}, V)$ est quasi-libre alors

$$QA \simeq (V, \bar{d}),$$

où $\bar{d}$ désigne la différentielle induite par le conoyau. De plus, en intervertissant les quotients, nous obtenons :

$$Q\pi_0(A) \simeq H_0(QA), \ \forall A \in \mathrm{dg}\,\mathcal{P} - \mathrm{Alg}.$$

2.7.2. Homologie de Quillen. Soient A une $\mathcal{P}$-algèbre différentielle graduée et F un modèle cofibrant de A. *L'homologie de Quillen* de A, notée $H_*^{\mathrm{Q}}(A)$, est l'espace vectoriel gradué $H_*(QF)$.

Il est clair qu'il faut montrer que $H_*^{\mathrm{Q}}(A)$ ne dépend pas du choix d'un modèle cofibrant de A (voir proposition 2.7.5). A cet effet, nous utilisons les lemmes classiques de la théorie des catégories modèles (lemmes 2.7.3 et 2.7.4) et nous renvoyons le lecteur aux articles de D. Quillen [Qu1] ou de W. Dwyer et J. Spalinski [D-S] pour les démonstrations.

2.7.3. Lemme. *Soit $F : \mathcal{C} \leftrightarrows \mathcal{D} : G$ une paire de foncteurs adjoints entre deux catégories modèles. Les assertions suivantes sont équivalentes :*
(i) F préserve les cofibrations et G préserve les fibrations,
(ii) F préserve les cofibrations et les cofibrations acycliques,
(iii) G préserve les fibrations et les fibrations acycliques. □

2.7.4. Lemme. *Soit $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un foncteur entre catégories modèles. Si F préserve les cofibrations acycliques entre objets cofibrants, alors F préserve les équivalences faibles entre objets cofibrants.* □

2.7.5. Proposition. *L'homologie de Quillen d'une $\mathcal{P}$-algèbre différentielle graduée A ne dépend pas du choix d'un modèle cofibrant de A.*

Démonstration. Soient F_1 et F_2 des modèles cofibrants de A. D'après la proposition 2.6.6, il existe un morphisme h tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd} & F_2 \arrow[d] \\ F_1 \arrow[r] \arrow[ur, dashed, "h"] & A \end{tikzcd}$$

commute à homotopie près. Comme F_1 et F_2 sont des modèles de A, on en déduit que h est une équivalence faible entre objets cofibrants.

Puisque le foncteur Q des indécomposables est l'adjoint à gauche du foncteur $(-)_+$, qui préserve de manière évidente les fibrations et les fibrations acycliques, d'après le lemme 2.7.3, il préserve les cofibrations acycliques. Par suite, d'après le lemme 2.7.4, le foncteur Q préserve les équivalence faibles entre objets cofibrants. Donc h induit un isomorphisme

$$H_*(QF_1) \simeq H_*(QF_2).$$ □

2.7.6. Proposition. *Soit $f : A \to B$ une équivalence faible entre deux $\mathcal{P}$-algèbres différentielles graduées. Alors le morphisme f induit un isomorphisme en homologie.*

Démonstration. Le diagramme de relèvement à homotopie près

$$\begin{tikzcd} F_A \arrow[r, dashed, "\tilde{f}"] \arrow[d] & F_B \arrow[d] \\ A \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd}$$

vu dans le corollaire 2.6.7 implique que $\tilde{f}$ est une équivalence faible entre objets cofibrants. En reprenant les mêmes arguments que dans la démonstration du lemme 2.7.5 nous obtenons un isomorphisme

$$H_*^{\mathrm{Q}}(A) = H_*(QF_A) \to H_*(QF_B) = H_*^{\mathrm{Q}}(B). \qquad \square$$

Enfin, comparons l'homologie de Quillen avec l'homologie opéradique définie dans la première partie (1.4.2).

2.7.7. Proposition. *L'homologie opéradique est la suspension de l'homologie de Quillen. Plus précisément, on a*

$$H_*^{\mathcal{P}} = H_{*-1}^{\mathrm{Q}}.$$

Démonstration. Nous avons vu dans la première partie (voir 1.4.6) que toute $\mathcal{P}$-algèbre différentielle graduée A admet une résolution quasi-libre de la forme :

$$T_{\mathcal{P}}C_{\mathcal{P}}(A) \to A$$

où $T_{\mathcal{P}}(C) = T(\mathcal{P}, s^{-1}C_{\mathcal{P}}(A))$ est munie d'une différentielle dont la partie linéaire est induite par celle de $C_{\mathcal{P}}(A)$ (cf. 1.4.4). Donc $H_*^{\mathrm{Q}}(A) = H_*(s^{-1}C_{\mathcal{P}}(A))$. Mais par définition de l'homologie opéradique, on a : $H_*^{\mathcal{P}}(A) = H_*(C_{\mathcal{P}}(A))$. $\square$

3. Homotopie rationnelle des algèbres différentielles graduées

Dans la section précédente nous avons défini l'homotopie d'une $\mathcal{P}$-algèbre différentielle graduée A (voir définition 2.2.1) comme étant l'homologie du complexe sous-jacent, ainsi que l'homologie de Quillen de A (voir définition 2.7.2) comme étant l'homologie du complexe des indécomposables d'un modèle cofibrant.

Avec ces deux notions nous nous proposons de développer une théorie analogue à la théorie de l'homotopie rationnelle pour des algèbres différentielles gradués sur une opérade de Koszul.

Nous démontrons l'analogue de théorèmes classiques comme les théorèmes d'Hurewicz (théorème 3.2.2) et de Whitehead (théorème 3.3.1). Puis, nous construisons le modèle minimal d'une $\mathcal{P}$-algèbre différentielle graduée A et nous montrons qu'il contient toutes les informations homotopiques et homologiques de A (théorème 3.4.4).

Tout d'abord, nous montrons que la théorie de l'homotopie rationnelle classique ainsi que celle des algèbres de Leibniz s'inscrit dans notre cadre.

Par la suite, $\mathcal{P}$ désignera une opérade de Koszul unitale.

3.1. La théorie de l'homotopie rationnelle classique et celle des algèbres de Leibniz

3.1.1. Théorie de l'homotopie rationnelle classique. Rappelons que dans l'article “Rational homotopy theory” [Qu3], Quillen introduit un foncteur λ de la catégorie des espaces topologiques simplement connexes dans la catégorie des algèbres de Lie différentielles graduées réduites tel que

$$\begin{aligned}&\pi_*(S)\otimes\mathbb{Q} = \pi_{*-1}(\lambda(S)) \text{ et}\\ &\tilde{H}_*(S\,;\mathbb{Q}) = H_*^{\mathcal{L}\mathrm{ie}}\lambda(S) = H_{*-1}^{\mathrm{Q}}(\lambda(S)).\end{aligned}$$

Par ailleurs, il construit une paire de foncteurs adjoints entre la catégorie des algèbres de Lie différentielles graduées ($ALDG$) et la catégorie des cogèbres co-commutatives différentielles graduées réduites ($CDGC_0$) :

$$\mathcal{C}\ : ALDG \leftrightarrows CDGC_0\ : \mathcal{L},$$

qui sont en fait les foncteurs $C_{\mathcal{P}}$ et $T_{\mathcal{P}}$ associés à l'opérade $\mathcal{L}$ie, l'opérade $\mathcal{C}$om étant son opérade duale (voir 1.2.6 et 1.4.7). Avec la théorie des opérades, nous retrouvons que l'unité et la co-unité de l'adjonction sont des quasi-isomorphismes.

Par conséquent tous les résultats que nous allons obtenir dans le cadre des $\mathcal{P}$-algèbres différentielles graduées sont valables dans la théorie de l'homotopie rationnelle classique.

3.1.2. Homotopie rationnelle des algèbres de Leibniz. Soit L une algèbre de Leibniz différentielle graduée. Rappelons les notations du premier chapitre. Les foncteurs $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}^!$ sont les foncteurs $T_\mathcal{P}$ et $C_\mathcal{P}$ pour l'opérade $\mathcal{L}$eib. Ils sont adjoints l'un de l'autre, et nous obtenons grâce à la théorie des opérades que l'unité et la co-unité de l'adjonction sont des quasi-isomorphismes, sans hypothèse de réduction sur l'algèbre de Leibniz considérée (voir théorème 3.7 du premier chapitre). De plus nous avons

$$\begin{aligned}\pi\lambda_*(L) =& H_*(sL) = \pi_{*-1}(L),\\ H\lambda_*(L) =& H_*(\mathcal{L}^!(L)) = H_*^{\mathcal{L}\mathrm{eib}}(L) = H_{*-1}^{\mathrm{Q}}(L),\end{aligned}$$

où $\pi\lambda_*$ et $H\lambda_*$ sont les notations utilisées dans le premier chapitre (définition 3.8).

3.2. Le théorème d'Hurewicz

Le théorème d'Hurewicz donne une relation entre l'homotopie et l'homologie de Quillen d'une $\mathcal{P}$-algèbre différentielle graduée.

3.2.1. Définition. Soit A une $\mathcal{P}$-algèbre différentielle graduée et F un modèle cofibrant. La projection de F sur ses indécomposables QF induit un morphisme $\pi_*(A) = \pi_*(F) \longrightarrow H_*(QF) = H_*^{\mathrm{Q}}(A)$ appelé *morphisme d'Hurewicz* et noté ϕ.

3.2.2. Théorème. *Soient A une $\mathcal{P}$-algèbre différentielle graduée et n un entier positif.*

a) Si $\pi_k(A) = 0$ pour $0 \leq k \leq n$, alors le morphisme d'Hurewicz est un isomorphisme pour $k \leq 2n+1$ et un épimorphisme pour $k = 2n+2$.

b) Si $\pi_0(A) = 0$ et $H_k^{\mathrm{Q}}(A) = 0$ pour $0 \leq k \leq n$, alors le morphisme d'Hurewicz est un isomorphisme pour $k \leq 2n+1$ et un épimorphisme pour $k = 2n+2$.

Démonstration. a) Supposons $\pi_k(A) = 0$ pour $0 \leq k \leq n$. Considérons la $\mathcal{P}$-algèbre différentielle graduée B définie par

$$\begin{aligned}&B_i = A_i \text{ pour } i \geq n+2,\\ &B_i = 0 \text{ pour } i \leq n \text{ et}\\ &B_{n+1} = \mathrm{Ker}(d\ : A_{n+1} \to A_n).\end{aligned}$$

Il est alors clair que (B, d) est une $\mathcal{P}$-algèbre différentielle graduée. De plus, le morphisme $B \to A$ est une équivalence faible. Considérons la résolution quasi-libre canonique de B : $F = T_\mathcal{P}(C_\mathcal{P}(B))$ (cf. 1.4.6). Cette résolution est aussi un modèle cofibrant pour A. D'après la définition 1.4.1 du foncteur $C_\mathcal{P}$, comme B_i est nul pour $0 \leq i \leq n$, l'espace vectoriel gradué $(s^{-1}C_\mathcal{P}(B))$ est nul en degrés $\leq n$; donc

$$F^2 = \bigoplus_{i\geq 2} \mathcal{P}(i) \otimes_{\mathrm{S}_i} (s^{-1}C_\mathcal{P}B)^{\otimes i}$$

est $2n+1$-réduit.

La suite exacte courte $0 \to F^2 \to F \to QF \to 0$ induit une suite exacte longue en homologie

$$\cdots \to H_k(F^2) \to H_k(F) \to H_k(QF) \to H_{k-1}(F^2) \to \cdots,$$

donc en remplaçant $H_k(F)$ par $\pi_k(A)$ et $H_k(QF)$ par $H_k^{\mathrm{Q}}(A)$, nous obtenons la suite exacte longue

$$\cdots \to H_k(F^2) \to \pi_k(A) \xrightarrow{\phi} H_k^{\mathrm{Q}}(A) \to H_{k-1}(F^2) \to \cdots,$$

ce qui nous donne la première partie du théorème d'Hurewicz.

b) Nous allons montrer par récurrence sur k que $\pi_k(A)$ est nul pour $0 \leq k \leq n$. Pour $k = 0$ c'est évident. Supposons $\pi_i(A) = 0$ pour $0 \leq i \leq k$ où $k < n$. Alors, d'après la partie a) du théorème, le morphisme d'Hurewicz ϕ_i est un isomorphisme pour $0 \leq i \leq 2k+1$, en particulier $\pi_{k+1}(A) = 0$ puisque $H_{k+1}^{\mathrm{Q}}(A) = 0$. Donc $\pi_k(A)$ est nul pour $0 \leq k \leq n$ et l'on peut se reporter à la partie a) du théorème. $\square$

3.2.3. Théorème d'Hurewicz classique. *Soit S un espace topologique simplement connexe.*

a) Si S est n-connexe, alors le morphisme d'Hurewicz rationnel est un isomorphisme pour $k \leq 2n$ et un épimorphisme pour $k = 2n+1$;

b) Si $\tilde{H}(S\,;\mathbb{Q}) = 0$ pour $k \leq n$, alors le morphisme d'Hurewicz rationnel est un isomorphisme pour $k \leq 2n$ et un épimorphisme pour $k = 2n+1$.

Démonstration. Il suffit d'appliquer le théorème 3.2.2 au cas $\mathcal{P} = \mathcal{L}\mathrm{ie}$ et $A = \lambda S$ (cf. 3.1.1). $\square$

Remarquons que H.J. Baues et J.-M. Lemaire ont démontré ce résultat [B-L].

3.2.4. Théorème d'Hurewicz-Leibniz. En appliquant le théorème d'Hurewicz au cas $\mathcal{P} = Leib$, nous retrouvons le théorème d'Hurewicz 4.3 du premier chapitre.

3.3. Le théorème de Whitehead

Nous avons déjà montré que si un morphisme est une équivalence faible, alors c'est un isomorphisme en homologie (voir 2.7.6). La réciproque est fausse en général. En effet, considérons le cas associatif. L'homologie opéradique d'une algèbre associative non unitaire est l'homologie du complexe

$$\begin{array}{cccc} b' : & A^{\otimes n} & \to & A^{\otimes n-1} \\ & a_1 \otimes \cdots \otimes a_n & \mapsto & \sum\limits_{i=1}^{n-1} (-1)^i a_1 \otimes \cdots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_n. \end{array}$$

Or, si A est unitaire, ce complexe qui provient d'un complexe simplicial, admet une dégénerescence supplémentaire ; par suite, $H_*^{\mathcal{A}\mathrm{s}}(A) = 0$. Mais $\pi_0(A) = A$, donc $\pi_*(A) \neq 0$.

Cependant, nous obtenons la réciproque avec des hypothèses supplémentaires :

3.3.1. Théorème. *Soient A et B deux $\mathcal{P}$-algèbres différentielles graduées. Supposons que A et B sont connexes (i.e. $\pi_0(A) = \pi_0(B) = 0$). Sous ces hypothèses, si $f : A \to B$ est un isomorphisme en homologie, alors f est un isomorphisme en homotopie.*

Démonstration. Comme dans la démonstration du théorème 3.2.2, il existe un diagrame

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ {\scriptstyle i_A}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle i_B} \\ A' & \xrightarrow{f'} & B' \end{array}$$

où $A'_0 = B'_0 = 0$ et i_A et i_B sont des équivalences faibles. En appliquant le foncteur $C_{\mathcal{P}}$, nous obtenons le diagramme

$$\begin{array}{ccc} C_{\mathcal{P}}(A) & \xrightarrow{C_{\mathcal{P}}(f)} & C_{\mathcal{P}}(B) \\ {\scriptstyle C_{\mathcal{P}}(i_A)}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle C_{\mathcal{P}}(i_B)} \\ C_{\mathcal{P}}(A') & \xrightarrow{C_{\mathcal{P}}(f')} & C_{\mathcal{P}}(B'). \end{array}$$

Le foncteur $C_{\mathcal{P}}$ préserve les quasi-isomorphismes (voir lemme 1.4.3), donc les morphismes $C_{\mathcal{P}}(i_A)$ et $C_{\mathcal{P}}(i_B)$ sont des quasi-isomorphismes. De plus, par hypothèse le morphisme $C_{\mathcal{P}}(f)$ est un quasi-isomorphisme. Il en résulte que $C_{\mathcal{P}}(f')$ est également un quasi-isomorphisme entre cogèbres 2-réduites. Rappelons que le foncteur $T_{\mathcal{P}}$ préserve les quasi-isomorphismes entre cogèbres 2-réduites (voir lemme 1.4.5) ; donc $T_{\mathcal{P}}(C_{\mathcal{P}}(f'))$ est un quasi-isomorphisme. Par conséquent, le morphisme f' est une équivalence faible et il en est de même pour f. □

3.4. Le modèle minimal d'une algèbre différentielle graduée

C'est D. Sullivan [Su] qui le premier a introduit la notion de modèle minimal, dans le cadre des algèbres commutatives différentielles graduées. Par la suite, H.J. Baues et J.-M. Lemaire [B-L] se sont intéressés au modèle minimal d'une algèbre de Lie différentielle graduée. La notion de modèle minimal joue un grand rôle en homotopie rationnelle et l'on pourra se référer par exemple à D. Tanré [Ta] ou P.A. Griffiths et J.W. Morgan [Gr-M] pour l'étude de ce sujet. En fait, la théorie du modèle minimal n'est pas propre aux algèbres commutatives et aux algèbres de Lie, mais se généralise aux algèbres différentielles graduées sur une opérade de Koszul. C'est ce que nous nous proposons de montrer dans cette section en nous appuyant sur les techniques de J. Neisendorfer [Ne] et de M. Rothenberg et G. Triantafillou [R-T].

3.4.1. Algèbre minimale. Une $\mathcal{P}$-algèbre différentielle graduée est *minimale* si elle est quasi-libre engendrée par un espace vectoriel gradué réduit et si sa différentielle est *décomposable*. Plus précisément soit $A = (T(\mathcal{P}, V), d)$ une $\mathcal{P}$-algèbre différentielle graduée quasi-libre. Alors A est minimale si $V_0 = 0$ et si sa différentielle d vérifie

$$d(V) \subset A^2 = \bigoplus_{k \geq 2} (\mathcal{P}(k) \otimes_{S_k} V^{\otimes k}).$$

3.4.2. Modèle minimal. Soit A une $\mathcal{P}$-algèbre différentielle graduée. Un *modèle minimal* de A est une équivalence faible $\phi : A' \to A$ avec A' minimale.

3.4.3. Théorème. *Toute $\mathcal{P}$-algèbre différentielle graduée connexe admet un modèle minimal unique à isomorphisme près.*

Nous démontrons ce théorème par la suite (cf. 3.4.6 et 3.4.7). L'importance du modèle minimal réside dans le fait qu'il contient l'information homotopique et homologique de l'algèbre :

3.4.4. Théorème. *Soit A une $\mathcal{P}$-algèbre différentielle graduée connexe et $T(\mathcal{P}, V)$ son modèle minimal. Alors*

$$\pi_*(A) \simeq \pi_* T(\mathcal{P}, V) \ \text{ et } \ H_*^{\mathrm{Q}}(A) \simeq V$$

Démonstration. La première identité provient de l'équivalence faible $T(\mathcal{P}, V) \to A$. Par ailleurs, d'après la définition de l'homologie de Quillen, comme $T(\mathcal{P}, V)$ est un modèle cofibrant de A, on a :

$$H_*^{\mathrm{Q}}(A) = H_* Q T(\mathcal{P}, V).$$

Or la différentielle de $T(\mathcal{P}, V)$ est décomposable, donc la différentielle sur les indécomposables de $T(\mathcal{P}, V)$ est nulle. Nous en déduisons la seconde identité. $\square$

La proposition suivante, nous permet de démontrer l'unicité du modèle minimal.

3.4.5. Proposition. *Une équivalence faible entre deux $\mathcal{P}$-algèbres minimales est un isomorphisme.*

Démonstration. Soit $\phi : X \to Y$ une équivalence faible entre deux $\mathcal{P}$-algèbres minimales. D'après la proposition 2.7.6, ϕ est aussi un isomorphisme en homologie. Posons $X = T(\mathcal{P}, V, d)$ et $Y = T(\mathcal{P}, V', d')$. Comme d et d' sont toutes deux décomposables, on a $V = H_*^{\mathrm{Q}}(X)$ et $V' = H_*^{\mathrm{Q}}(Y)$; par suite ϕ induit un isomorphisme entre V et V', donc entre X et Y. $\square$

3.4.6. Démonstration de l'unicité du modèle minimal. Soit A une $\mathcal{P}$-algèbre différentielle graduée, $u_X : X \to A$ et $u_Y : Y \to A$ deux modèles minimaux. Le modèle X étant un modèle cofibrant, il existe un morphisme $\phi : X \to Y$ tel que $u_Y\phi$ soit homotope à u_X (voir proposition 2.6.6). En particulier, ϕ est une équivalence faible entre deux modèles minimaux, donc ϕ est un isomorphisme. □

3.4.7. Démonstration de l'existence d'un modèle minimal. Soit L une $\mathcal{P}$-algèbre différentielle graduée connexe. Quitte à remplacer L par sa troncature

$$\begin{aligned}&M_i = L_i \text{ pour } i \geq 2,\\ &M_i = 0 \text{ pour } i = 0 \text{ et}\\ &M_1 = \operatorname{Ker}(d : L_1 \to L_0),\end{aligned}$$

nous pouvons supposer que L est réduite.

Nous allons montrer par récurrence qu'il existe une suite de morphismes $\phi_n : \Lambda^{(n)} \to L$ tels que :

i) la $\mathcal{P}$-algèbre différentielle graduée $\Lambda^{(n)}$ est minimale engendrée par un espace vectoriel gradué concentré en degrés $\leq n$;
ii) le morphisme ϕ_n induit un isomorphisme en homotopie pour $k < n$ et un épimorphisme en homotopie pour $k = n$;
iii) Le noyau N^n de l'application $Z_n(\Lambda^{(n)}) \xrightarrow{p_\Lambda} \pi_n(\Lambda^{(n)}) \xrightarrow{[\phi_n]} \pi_n(L)$ est constitué d'éléments décomposables.

Démonstration. Pour $n = 1$, posons $\Lambda^{(1)} = (T(\mathcal{P}, \pi_1(L)), 0)$. Soit ϕ_1 le morphisme induit par une section de l'application $L_1 \to \pi_1(L)$. Il est évident que ϕ_1 induit un épimorphisme en homotopie en degré 1. De plus, comme $Z_1(\Lambda^{(1)}) = \pi_1(L)$, on a $N^1 = 0$.

Supposons que l'on ait construit $(\Lambda^{(n)}, \phi_n)$ satisfaisant les trois conditions ci-dessus. Nous allons construire $(\Lambda^{(n+1)}, \phi_{n+1})$ en deux étapes.

Première étape. Posons $V = \operatorname{Ker}([\phi_n] : \pi_n(\Lambda^{(n)}) \to \pi_n(L))$. Choisissons j une section de p_Λ et δ une section de $d_{n+1} : L_{n+1} \to B_n(L)$. Considérons l'application

$$\begin{array}{rccc} d: & sV & \to & Z_n\Lambda^{(n)} \\ & sv & \mapsto & j(v). \end{array}$$

Alors, il existe une application $\psi_{n+1} : sV \to L_{n+1}$ faisant commuter le diagramme

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r] & \pi_n(\Lambda^{(n)}) \arrow[r, "{[\phi_n]}"] \arrow[d, dashed, shift left, "j"] & \pi_n(L) \\ sV \arrow[u] \arrow[r, "d"] \arrow[dr, dashed, "\psi_{n+1}"'] & Z_n(\Lambda^{(n)}) \arrow[r, "\phi_n"] \arrow[u, shift left, "p_\Lambda"] & Z_n(L) \arrow[u, "p_L"'] \\ & L_{n+1} \arrow[r, shift right, "d_{n+1}"'] & B_n(L). \arrow[u] \arrow[l, dashed, shift right, "\delta"'] \end{tikzcd}$$

En effet, par définition de V, on a $p_L\phi_n d(sv) = [\phi_n]p_\Lambda d(sv) = 0$, donc $\phi_n d(sv) \in B_n(L)$. Il est alors clair qu'en définissant $\psi_{n+1}(sv) = \delta\phi_n d(sv)$, l'application ψ_{n+1} convient.

Munissons la $\mathcal{P}$-algèbre $G_{n+1} = \Lambda^{(n)} \vee T(\mathcal{P}, sV)$ de la différentielle d' suivante :
- sur $\Lambda^{(n)}$, d' est la différentielle déjà existante ;
- sur $T(\mathcal{P}, sV)$, d' est la dérivation de $\mathcal{P}$-algèbre induite par l'application d.

Alors G_{n+1} est minimale engendrée par un espace vectoriel concentré en degrés $\leq n+1$. En effet, elle est quasi-libre et d' est décomposable : la nullité de $[\phi_n]p_\Lambda d(sv)$ implique que $d(sv)$ appartient à N^n.

Considérons le morphisme $\psi_{n+1} : G_{n+1} \to L$ induit par ϕ_n sur $\Lambda^{(n)}$ et par ψ_{n+1} sur sV. Il est alors aisé de vérifier que ψ_{n+1} est un morphisme de complexes qui induit un isomorphisme en homotopie en degrés $\leq n$.

Deuxième étape. Posons $C = \mathrm{Coker}([\psi_{n+1}] : \pi_{n+1}(G_{n+1}) \to \pi_{n+1}(L))$. Soit p la projection $\pi_{n+1}(G_{n+1}) \to C$; choisissons i une section de p et s une section de p_L. Posons $k = si$ et considérons le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\pi_{n+1}(G_{n+1}) \arrow[r, "{[\psi_{n+1}]}"] & \pi_{n+1}(L) \arrow[r, shift left, "p"] \arrow[d, dashed, shift left, "s"] & C \arrow[l, dashed, shift left, "i"] \arrow[dl, "k"] \\
Z_{n+1}(G_{n+1}) \arrow[u] \arrow[r, "\psi_{n+1}"] & Z_{n+1}(L). \arrow[u, shift left, "p_L"] &
\end{tikzcd}$$

Nous définissons sur la $\mathcal{P}$-algèbre graduée $\Lambda^{(n+1)} = G_{n+1} \vee T(\mathcal{P}, C)$ la différentielle δ suivante :
- sur G_{n+1}, δ coïncide avec d' ;
- sur $T(\mathcal{P}, C)$, δ est nulle.

Il est clair que $\Lambda^{(n+1)}$ est minimale engendrée par un espace vectoriel concentré en degrés $\leq n+1$. Considérons le morphisme $\phi_{n+1} : \Lambda^{(n+1)} \to L$ induit par ϕ_{n+1} sur G_{n+1} et par k sur C. Il est alors facile de vérifier que ϕ_{n+1} est un morphisme de complexes qui réalise un isomorphisme en homotopie pour $k < n+1$ et un épimorphisme en homotopie pour $k = n+1$.

Il reste à montrer que N^{n+1} est décomposable. Remarquons que

$$Z_{n+1}(\Lambda^{(n+1)}) = Z_{n+1}(G_{n+1}) \oplus C.$$

Choisissons z dans N^{n+1} et décomposons le en $z = z' + z''$ dans cette somme directe. Comme $[\phi_{n+1}(z)]$ est nul, on a

$$[\phi_{n+1}(z')] = -[\phi_{n+1}(z'')] = -p_L k(z'') = -i(z'').$$

En appliquant p, nous obtenons : $z'' = 0$. Donc $N^{n+1} \subset Z_{n+1}(G_{n+1})$. Or en degré $n+1$, on a $G_{n+1} = \Lambda^{(n)}_{n+1} \oplus (sV)$. En décomposant z en $z_1 + sv$ dans cette somme directe, l'égalité $dz = 0 = dz_1 + j(v)$ implique $v = p_\Lambda j(v) = -p_\Lambda d(z_1) = 0$. Par conséquent $z = z_1$ et z_1 est nécessairement décomposable puisque $\Lambda^{(n)} = T(\mathcal{P}, V_n)$ où V_n est un espace vectoriel gradué nul en degrés $> n$. $\square$

4. Théorie de l'obstruction pour les algèbres différentielles graduées

Dans le cadre des algèbres de Lie différentielles graduées l'obstruction au relèvement des applications a été développée par M. Rothenberg et G. Triantafillou [R-T]. L'objet de cette section est de montrer qu'une théorie de l'obstruction (relèvement des applications et relèvement des homotopies) existe dans la catégorie des algèbres différentielles graduées sur une opérade de Koszul.

Soient N une $\mathcal{P}$-algèbre différentielle graduée quasi-libre et $i\ : N \to L$ un morphisme quasi-libre. La théorie de l'obstruction repose sur deux problèmes de relèvement. Le premier problème est le suivant : étant donnés un morphisme $l\ : N \to M$, avec M connexe, et un diagramme

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, "l"] \arrow[d, "i"'] & M \\ L \arrow[ur, dashed] & \end{tikzcd}$$

quelle est l'obstruction à l'existence d'un relèvement dans ce diagramme ?

Le deuxième problème concerne l'obstruction à un relèvement homotopique. Plus précisément, étant donnés deux morphismes $f, g\ : L \to M$, avec M connexe, homotopes sur N, quelle est l'obstruction à l'existence d'une homotopie entre f et g ?

Nous allons montrer que ces deux problèmes se résolvent en parallèle et que les obstructions successives se trouvent dans $H^{n+1}\,\mathrm{Hom}(QL/QN, \pi_n(M))$, pour le premier problème, et dans $H^n\,\mathrm{Hom}(QL/QN, \pi_n(M))$, pour le deuxième problème.

Notations. Fixons $\mathcal{P}$ une opérade de Koszul unitale (i.e. $\mathcal{P}(0) = 0$ et $\mathcal{P}(1) = K$). Rappelons qu'une $\mathcal{P}$-algèbre quasi-libre est une $\mathcal{P}$-algèbre graduée libre. Donc N est de la forme

$$T(\mathcal{P}, V) = \bigoplus_{n\geq 1} \mathcal{P}(n) \otimes_{\mathrm{S}_n} V^{\otimes n}.$$

Posons $L = N \vee T(\mathcal{P}, W) = T(\mathcal{P}, V \oplus W)$. Rappelons que le module des indécomposables de L, noté QL, est L/L^2, où

$$L^2 = \bigoplus_{n\geq 2} \mathcal{P}(n) \otimes_{\mathrm{S}_n} (V \oplus W)^{\otimes n}.$$

Ainsi QL est isomorphe à $V \oplus W$.

La filtration squelettale de W est la filtration $\mathrm{sk}_n\, W = \bigoplus_{i=0}^{n} W_i$. Posons $\mathrm{sk}_n\, L = N \vee T(\mathcal{P}, \mathrm{sk}_n\, W)$ et $\mathrm{sk}_{-1}\, L = N$.

4.1. Obstruction au relèvement des applications

Dans un premier temps, nous déterminons l'obstruction au relèvement d'un morphisme $f\ :\mathrm{sk}_n L \to M$ en un morphisme $f'\ :\mathrm{sk}_{n+1} L \to M$

4.1.1. Lemme. *Soit f un morphisme de $\mathcal{P}$-algèbres différentielles graduées de $\mathrm{sk}_n L$ dans M connexe. Alors f détermine un élément $\mathcal{O}(f) \in Z^{n+1}\,\mathrm{Hom}(QL/QN, \pi_n M)$ qui est l'obstruction à étendre f à $\mathrm{sk}_{n+1} L$. De plus l'élément $\mathcal{O}(f)$ ne dépend que de la classe d'homotopie de f.*

Démonstration. Dans le diagramme

$$\begin{tikzcd}
L_{n+2} \arrow[r, "d_{n+2}"] \arrow[d, "\rho_{n+2}"] & L_{n+1} \arrow[r, "fd_{n+1}"] \arrow[d, "\rho_{n+1}"] & Z_n(M) \arrow[r, "p"] & \pi_n(M) \\
(QL)_{n+2} \arrow[r, "\bar{d}_{n+2}"] & (QL)_{n+1} \arrow[rru, dashed, "c_f"'] & &
\end{tikzcd}$$

il existe un unique c_f tel que $c_f\rho_{n+1} = pfd_{n+1}$. En effet, il suffit de vérifier que l'application pfd_{n+1} est nulle sur $(L^2)_{n+1}$. Comme cette application est nulle sur $\mathrm{sk}_n L$, il suffit de montrer que pour tout x de la forme $\mu(x_1, \cdots, x_p)$, avec $p \geq 2$ et $|x_i| = n+1$ pour un certain i, $pfd_{n+1}(x) = 0$. Quitte à permuter les variables, nous pouvons supposer $|x_p| = n+1$. Alors, nécessairement $|x_j| = 0$ pour $j \neq p$ et l'on a

$$\begin{aligned} pfd_{n+1}\mu(x_1, \cdots, x_p) &= pf\mu(x_1, x_2, \cdots, dx_p) \\ &= p\mu(f(x_1), f(x_2), \cdots, f(dx_p)). \end{aligned}$$

Or M est connexe, donc il existe $y_1 \in M_1$ tel que $f(x_1) = dy_1$. Par conséquent

$$\begin{aligned} pfd_{n+1}\mu(x_1, \cdots, x_p) &= p\mu(dy_1, f(x_2), \cdots, f(dx_p)) \\ &= pd\mu(y_1, f(x_2), \cdots, f(dx_p)) = 0. \end{aligned}$$

Ceci achève la preuve de l'existence de c_f. Comme le morphisme pfd_{n+1} est nul sur $\mathrm{sk}_n L$, *a fortiori* il est nul sur N. Par suite,

$$\forall u \in (QN)_{n+1},\ c_f(u) = 0.$$

Notons $\mathcal{O}(f) \in \mathrm{Hom}(QL/QN, \pi_n(M))^{n+1}$ le morphisme défini par $\mathcal{O}(f)([u]) = c_f(u)$ où $[u]$ est la classe de u dans $(QL/QN)_{n+1}$. Montrons que $d\mathcal{O}(f) = 0$. Soient $u \in (QL)_{n+2}$ et $l \in L_{n+2}$ tels que $u = \rho_{n+2}(l)$. On a

$$d\mathcal{O}(f)([u]) = c_f(\bar{d}_{n+2}(u)) = pfd_{n+1}d_{n+2}(l) = 0.$$

En conclusion, f s'étend à $\mathrm{sk}_{n+1} L$ si et seulement si, pour tout x élément d'une base de W_{n+1}, il existe y dans M_{n+1} tel que $f(dx) = dy$, c'est-à-dire si et seulement si $pf(dx) = 0$. En d'autres termes, f s'étend à $\mathrm{sk}_{n+1} L$ si et seulement si $\mathcal{O}(f) = 0$.

Montrons que $\mathcal{O}(f)$ ne dépend que de la classe d'homotopie (de chaîne) de f. Soit h une homotopie de chaîne entre f et g. Alors, $\forall x \in L_{n+1},\ fd_{n+1}x - gd_{n+1}x = dhd_{n+1}x$. En conséquence, $c_f = c_g$. $\square$

Ce lemme est donc un premier pas vers la théorie de l'obstruction. Lorsque $\mathcal{O}(f)$ n'est pas nul, mais que sa classe dans $H^{n+1}\operatorname{Hom}(QL/QN, \pi_n(M))$ est nulle, nous allons montrer que l'on peut étendre f en une application $\tilde{f}$ à $\operatorname{sk}_{n+1} L$, seulement $\tilde{f}$ ne coïncide avec f que sur $\operatorname{sk}_{n-1} L$ (voir théorème 4.1.5).

4.1.2. Lemme. *Soient $f, g\ :\operatorname{sk}_n L \to M$ deux morphismes de $\mathcal{P}$-algèbres différentielles graduées. Supposons qu'il existe une homotopie $H\ :\operatorname{sk}_{n-1} L \to M^I$ entre f et g. Ces hypothèses déterminent un élément $\Delta(f, g, H)$ dans $\operatorname{Hom}(QL/QN, \pi_n(M))^n$ qui est l'obstruction à étendre H à $\operatorname{sk}_n L$ en une homotopie de f à g. De plus $\Delta(f, g, H)$ ne dépend que des classes d'homotopie de f et g.*

Démonstration. Remarquons que si f et g sont homotopes, alors il existe une homotopie via l'espace de chemins canonique, puisque $\operatorname{sk}_{n-1} L$ est cofibrant (voir 2.6.3). Nous allons utiliser les notions d'intégration vues en 2.6.1. L'application

$$\psi = g - f - \int_0^1 Hd\ : L_n \longrightarrow M$$

est à valeurs dans $Z_n(M)$. En effet

$$d(g-f)(x) - d\int_0^1 Hd(x) = (g-f)(dx) - (g-f)(dx) + \int_0^1 dHd(x) = 0.$$

Dans ces conditions, le diagramme

$$\begin{tikzcd}
L_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}"] \arrow[d, "\rho_{n+1}"] & L_n \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\rho_n"] & Z_n(M) \arrow[r, "p"] & \pi_n(M) \\
(QL)_{n+1} \arrow[r, "\bar{d}_{n+1}"] & (QL)_n \arrow[urr, dashed, "C_H"'] & &
\end{tikzcd}$$

admet une unique factorisation C_H. En effet, il suffit de vérifier que l'application $p\psi$ est nulle sur $(L^2)_n$. Remarquons tout d'abord que

$$p\psi(x) = 0,\ \forall x \in \operatorname{sk}_{n-1} L.$$

En effet, si $x \in \operatorname{sk}_{n-1} L$, alors

$$\int_0^1 Hd(x) = \int_0^1 dH(x) = (g-f)(x) - d\int_0^1 H(x),$$

donc $\psi(x)$ est un bord. En particulier, on a

$$\forall x \in (QN)_n,\ C_H(x) = 0.$$

Soit $x = \mu(x_1, \cdots, x_p)$, $p \geq 2$, un élément de $(L^2)_n$. La remarque ci-dessus nous permet de considérer uniquement le cas où il existe i tel que $|x_i| = n$, et quitte à permuter les variables, nous pouvons supposer que $|x_p| = n$. Dans ces conditions, $|x_j| = 0$, $\forall j \neq p$. Comme M est connexe, il en est de même pour M^I, donc il existe $z \in (M^I)_1$ tel que $dz = Hx_1$. Remarquons que $p_0 dz = fx_1$ et $p_1 dz = gx_1$. Alors

$$\psi\mu(x_1, \cdots, x_p) =$$

$$\mu(dp_1 z, gx_2, \cdots, gx_p) - \mu(dp_0 z, fx_2, \cdots, fx_p) - \textstyle\int_0^1 \mu(dz, Hx_2, \cdots, Hdx_p) =$$

$$\mu(dp_1 z, gx_2, \cdots, gx_p) - \mu(dp_0 z, fx_2, \cdots, fx_p) - \textstyle\int_0^1 d\mu(z, Hx_2, \cdots, Hdx_p) =$$

$$d\mu(p_1 z, gx_2, \cdots, gx_p) - d\mu(p_0 z, fx_2, \cdots, fx_p) +$$

$$\mu(p_1 z, gx_2, \cdots, gdx_p) - \mu(p_0 z, fx_2, \cdots, fdx_p) +$$

$$d \textstyle\int_0^1 \mu(z, Hx_2, \cdots, Hdx_p) - p_1\mu(z, Hx_2, \cdots, Hdx_p) + p_0\mu(z, Hx_2, \cdots, Hdx_p) =$$

$$d\{\mu(p_1 z, gx_2, \cdots, gx_p) - \mu(p_0 z, fx_2, \cdots, fx_p) + \textstyle\int_0^1 \mu(z, Hx_2, \cdots, Hdx_p)\}.$$

Donc $p\psi(x) = 0$.

Ainsi la donnée des morphismes f, g et H nous permet de construire un élément de $\mathrm{Hom}(QL/QN, \pi_n(M))^n$, noté $\Delta(f, g, H)$, et défini par

$$\Delta(f, g, H)([u]) = C_H(u).$$

Supposons que $\Delta(f, g, H)$ soit nul. Soit $(w_\alpha)_{\alpha \in A}$ une base de W_n. Alors, pour tout w_α, il existe $u_\alpha \in M_{n+1}$ tel que $\psi(w_\alpha) = du_\alpha$. En posant

$$\begin{aligned} H'(x) &= H(x), \ \forall x \in \mathrm{sk}_{n-1} L \text{ et} \\ H'(w_\alpha) &= f(w_\alpha) \otimes 1 + du_\alpha \otimes t + (-1)^{n+1} u_\alpha \otimes dt + \int_0^t H(dw_\alpha), \end{aligned}$$

nous pouvons étendre H' à $\mathrm{sk}_n L$ en un morphisme de $\mathcal{P}$-algèbres différentielles graduées ; il est alors facile de vérifier que H' est une homotopie de f à g qui coïncide avec H sur $\mathrm{sk}_{n-1} L$. $\square$

4.1.3. Lemme. *Soient f et g deux morphismes de $\mathrm{sk}_n L$ dans M connexe, et $H : \mathrm{sk}_{n-1} L \to M^I$ une homotopie entre les restrictions de f et g à $\mathrm{sk}_{n-1} L$. Alors*

$$\mathcal{O}(g) - \mathcal{O}(f) = d\Delta(f, g, H).$$

Démonstration. Il suffit de montrer l'égalité $dC_H = c_g - c_f$ dans $\mathrm{Hom}(QL, \pi_n(M))^{n+1}$. Choisissons u dans $(QL)_{n+1}$, et l dans L_{n+1} tels que $u = \rho_{n+1}(l)$. Alors,

$$\begin{aligned} C_H(\bar{d}_{n+1}u) &= C_H(\bar{d}_{n+1}\rho_{n+1}l) \\ &= C_H(\rho_n d_{n+1}l) \\ &= p(g-f)d_{n+1}(l) \\ &= (c_g - c_f)(u). \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{O}(g) - \mathcal{O}(f) = d\Delta(f, g, H)$. □

Dans le premier problème que nous nous sommes posé, il n'y a pas de notions d'homotopie, et l'on peut considérer des morphismes f et g de $\mathrm{sk}_n L$ dans M qui coïncident sur $\mathrm{sk}_{n-1} L$. Les lemmes précédents sont encore valables, en prenant pour homotopie de f à g, l'homotopie constante $s_o f$. Pour cette homotopie là, notons $\Delta(f, g) = \Delta(f, g, s_0 f)$. Remarquons que $\int_0^1 s_0 f d = 0$, par définitions de s_0 (voir 2.4.2) et de l'intégrale (voir 2.6.1).

4.1.4. Lemme. *Soit $f : \mathrm{sk}_n L \to M$ un morphisme de $\mathcal{P}$-algèbres différentielles graduées, avec M connexe, et α un élément de $\mathrm{Hom}(QL/QN, \pi_n(M))^n$. Alors, il existe un morphisme $g : \mathrm{sk}_n L \to M$ tel que $g|_{\mathrm{sk}_{n-1} L} = f|_{\mathrm{sk}_{n-1} L}$ et tel que $\Delta(f, g) = \alpha$.*

Démonstration. Choisissons ϕ une section de $p : Z_n(M) \to \pi_n(M)$. Pour prouver l'existence de g, il suffit de définir g sur W_n et sur $\mathrm{sk}_{n-1} L$. Posons

$$\begin{aligned} &g|_{\mathrm{sk}_{n-1} L} = f|_{\mathrm{sk}_{n-1} L} \text{ et} \\ &g(x) = f(x) + \phi\alpha[\rho_n(x)],\ \forall x \in W_n. \end{aligned}$$

L'application g est bien définie : en effet $dg(x) = df(x) + d\phi\alpha[\rho_n(x)] = f(dx)$ puisque ϕ est à valeurs dans $Z_n(M)$. Vérifions $\Delta(f, g) = \alpha$. Comme on a

$$\begin{aligned} &C\rho_n(x) = p(g-f)(x) = p\phi\alpha([\rho_n x]) = \alpha([\rho_n x]),\ \forall x \in W_n, \text{ alors} \\ &\Delta(f, g)([\rho_n x]) = \alpha([\rho_n x]),\ \forall x \in W_n. \end{aligned}$$

Or la composée des deux applications $W_n \xrightarrow{\rho_n} (QL)_n \xrightarrow{[-]} (QL/QN)_n$ est un isomorphisme, donc $\Delta(f, g) = \alpha$. □

4.1.5. Théorème. *Soit $f : \mathrm{sk}_n L \to M$ un morphisme de $\mathcal{P}$-algèbres différentielles graduées, avec M connexe. Alors la classe de $\mathcal{O}(f)$ dans $H^{n+1}\,\mathrm{Hom}(QL/QN, \pi_n(M))$ définie dans le lemme 4.1.1 s'annule si et seulement si il existe $g : \mathrm{sk}_{n+1} L \to M$ tel que $g|_{\mathrm{sk}_{n-1} L} = f|_{\mathrm{sk}_{n-1} L}$.*

Démonstration. Si la classe de $\mathcal{O}(f)$ est nulle dans $H^{n+1}\,\mathrm{Hom}(QL/QN, \pi_n(M))$, alors il existe $\alpha \in \mathrm{Hom}(QL/QN, \pi_n(M))^n$ tel que $d\alpha = \mathcal{O}(f)$; or d'après le lemme 4.1.4, il existe un morphisme $g : \mathrm{sk}_n L \to M$ tel que $g|_{\mathrm{sk}_{n-1} L} = f|_{\mathrm{sk}_{n-1} L}$ et $\Delta(f, g) = -\alpha$. En utilisant le lemme 4.1.3, nous obtenons

$$d\Delta(f, g) = -d\alpha = -\mathcal{O}(f) = \mathcal{O}(g) - \mathcal{O}(f).$$

Par conséquent $\mathcal{O}(g)$ est nul, ce qui nous permet de dire, d'après le lemme 4.1.1, que g s'étend en un morphisme de $\mathrm{sk}_{n+1} L$ dans M.

Réciproquement, s'il existe $g : \mathrm{sk}_{n+1} L \to M$ tel que $g|_{\mathrm{sk}_{n-1} L} = f|_{\mathrm{sk}_{n-1} L}$ alors, d'après le lemme 4.1.3, $d\Delta(f, g) = \mathcal{O}(g) - \mathcal{O}(f) = -\mathcal{O}(f)$. Donc la classe de $\mathcal{O}(f)$ dans $H^{n+1} \operatorname{Hom}(QL/QN, \pi_n(M))$ est nulle. □

Ce théorème achève la solution du premier problème de relèvement.

4.2. Obstruction au relèvement des homotopies

Nous avons vu dans le lemme 4.1.2 que l'obstruction à étendre une homotopie entre deux morphismes est un élément de $\operatorname{Hom}(QL/QN, \pi_n M)^n$. Donc cela constitue une première réponse au problème de relèvement homotopique. Nous allons montrer un théorème analogue au théorème 4.1.5 en ce qui concerne le relèvement homotopique (voir le théorème 4.2.4).

4.2.1. Elément de comparaison entre deux homotopies. Considérons deux homotopies H et H' entre deux morphismes $f, g : \mathrm{sk}_{n-1} L \to M$, avec M connexe, qui coïncident sur $\mathrm{sk}_{n-2} L$, n pouvant être égal à 1. Remarquons que l'application

$$\tau = \int_0^1 (H - H') : L_{n-1} \to M_n$$

est à valeurs dans $Z_n(M)$, puisque H et H' coïncident sur $\mathrm{sk}_{n-2} L$. Alors le diagramme

$$\begin{tikzcd} L_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "\rho_n"] & L_{n-1} \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, "\rho_{n-1}"] & Z_n(M) \arrow[r, "p"] & \pi_n(M) \\ (QL)_n \arrow[r, "\bar{d}_n"] & (QL)_{n-1} \arrow[urr, dashed, "G"'] & & \end{tikzcd}$$

admet une unique factorisation G. Aux vues des diverses démonstrations précédentes, et puisque $p\tau$ s'annule sur $\mathrm{sk}_{n-2} L$, il suffit de montrer que pour tout $x = \mu(x_1, \cdots, x_p)$, avec $p \geq 2$, $|x_p| = n - 1$ et $|x_i| = 0$, $\forall i \neq p$, on a $p\tau(x) = 0$. Pour cela, nous devons distinguer deux cas, selon que n vaut 1, ou que n est strictement supérieur à 1.

Si n est égal à 1 alors $\forall i$, $|x_i| = 0$. Comme M est connexe, il existe $y_1 \in M_1$ tel que $dy_1 = p_0 H(x_1) = p_0 H'(x_1)$. Les éléments z et z' définis par

$$z = \int_0^t H(x_1) + y_1 \otimes 1 \text{ et}$$
$$z' = \int_0^t H'(x_1) + y_1 \otimes 1,$$

vérifient : $dz = H(x_1)$, $dz' = H'(x_1)$ et $p_0(z) = p_0(z') = y_1$. Nous obtenons

$$
\begin{aligned}
p\int_0^1 (H-H')\mu(x_1,\cdots,x_p) &= p\int_0^1 (\mu(dz,Hx_2,\cdots,Hx_p) - \mu(dz',H'x_2,\cdots,H'x_p)) \\
&= p\int_0^1 d(\mu(z,Hx_2,\cdots,Hx_p) - \mu(z',H'x_2,\cdots,H'x_p)) \\
&= p\mu(p_1(z-z'),p_1Hx_2,\cdots,p_1Hx_p).
\end{aligned}
$$

Comme $|H(x_p)| = 0$, il existe $u \in M_1$ tel que $du = p_1Hx_p$. Donc,

$$
\begin{aligned}
p\int_0^1 (H-H')\mu(x_1,\cdots,x_p) &= p\mu(p_1(z-z'),p_1Hx_2,\cdots,du) \\
&= \pm pd\mu(p_1(z-z'),p_1Hx_2,\cdots,u) = 0.
\end{aligned}
$$

Si $n > 1$, alors H et H' coïncident sur $\mathrm{sk}_0\, L$. De plus, il existe $y_1 \in M_1$ tel que $dy_1 = H(x_1) = H'(x_1)$. Par conséquent, on a

$$
\begin{aligned}
&p\int_0^1 (H-H')\mu(x_1,\cdots,x_p) = p\int_0^1 \mu(Hx_1,\cdots,Hx_{p-1},(H-H')x_p) = \\
&p\int_0^1 \{d\mu(y_1,\cdots,Hx_{p-1},(H-H')x_p) + \mu(y_1,\cdots,Hx_{p-1},(H-H')dx_p)\} = 0.
\end{aligned}
$$

Ainsi les homotopies H et H' nous permettent de construire un élément $\Gamma(H,H')$ de $\mathrm{Hom}(QL/QN,\pi_n(M))^{n-1}$, défini par

$$\Gamma(H,H')([u]) = G(u).$$

4.2.2. Lemme. *Soient $f, g : \mathrm{sk}_n\, L \to M$ deux morphismes de $\mathcal{P}$-algèbres différentielles graduées, avec M connexe. Soient $H, H' : \mathrm{sk}_{n-1}\, L \to M^I$ deux homotopies de f à g qui coïncident sur $\mathrm{sk}_{n-2}\, L$. On suppose $n \geq 1$. Alors*

$$d\Gamma(H,H') = \Delta(f,g,H') - \Delta(f,g,H).$$

Démonstration. Il suffit de montrer l'égalité $dG = C_{H'} - C_H$ dans $\mathrm{Hom}(QL,\pi_n(M))^n$. Choisissons u dans $(QL)_n$, et l dans L_n tels que $u = \rho_n(l)$. Alors,

$$
\begin{aligned}
G(\bar{d}_n u) = G(\rho_{n-1}dl) &= p\int_0^1 (H-H')dl = \\
&= p\big(g - h - \int_0^1 H'd\big)(l) - p\big(g - h - \int_0^1 Hd\big)(l) \\
&= C_H\rho_n l - C_{H'}\rho_n l = (C_H - C_{H'})(u).
\end{aligned}
$$

Donc $d\Gamma(H,H') = \Delta(f,g,H') - \Delta(f,g,H)$. □

4.2.3. Lemme. *Supposons $n \geq 1$. Soient $H : \mathrm{sk}_{n-1} L \to M^I$ une homotopie de f à g et α un élément de* $\mathrm{Hom}(QL/QN, \pi_n M)^{n-1}$. *Alors il existe une homotopie $\tilde{H} : \mathrm{sk}_{n-1} L \to M^I$ de f à g vérifiant*

$$\tilde{H}|_{\mathrm{sk}_{n-2} L} = H|_{\mathrm{sk}_{n-2} L} \text{ et}$$
$$\Gamma(H, H') = \alpha.$$

Démonstration. Choisissons ϕ une section de $p : Z_n(M) \to \pi_n(M)$. Pour prouver l'existence de $\tilde{H}$, il suffit de définir $\tilde{H}$ sur W_{n-1} et sur $\mathrm{sk}_{n-2} L$. Posons

$$\tilde{H}|_{\mathrm{sk}_{n-2} L} = H|_{\mathrm{sk}_{n-2} L} \text{ et}$$
$$\tilde{H}(x) = H(x) - \phi\alpha[\rho_{n-1}(x)] \otimes dt, \forall x \in W_{n-1}.$$

L'application $\tilde{H}$ est bien définie : en effet $d\tilde{H}(x) = H(dx)$ puisque ϕ est à valeurs dans $Z_n(M)$. Par ailleurs, comme on a $p_0\tilde{H} = p_0 H = f$ et $p_1\tilde{H} = p_1 H = g$, $\tilde{H}$ est une homotopie de f à g. Montrons que $\Gamma(H, \tilde{H}) = \alpha$. Comme pour tout x dans W_{n-1} on a

$$G\rho_{n-1}(x) = p\int_0^1 (H - \tilde{H})(x) = p\int_0^1 \phi\alpha([\rho_{n-1}x]) \otimes dt = p\phi\alpha([\rho_{n-1}x]) = \alpha([\rho_{n-1}x]),$$

nous en déduisons que $\Gamma(H, \tilde{H})([\rho_{n-1}x]) = \alpha([\rho_{n-1}x])$, $\forall x \in W_{n-1}$. Or la composée des deux applications

$$W_{n-1} \xrightarrow{\rho_n} (QL)_{n-1} \xrightarrow{[-]} (QL/QN)_{n-1}$$

est un isomorphisme, donc $\Gamma(H, \tilde{H}) = \alpha$. □

4.2.4. Théorème. *Supposons $n \geq 1$. Soient $f, g : \mathrm{sk}_{n+1} L \to M$ deux morphismes de $\mathcal{P}$-algèbres différentielles graduées à valeurs dans M connexe et soit $H : \mathrm{sk}_{n-1} L \to M^I$ une homotopie entre f et g. Alors la classe de $\Delta(f, g, H)$ dans $H^n(QL/QN, \pi_n M)$ est nulle si et seulement si il existe une homotopie $\tilde{H} : \mathrm{sk}_n L \to M^I$ de f à g qui coïncide avec H sur $\mathrm{sk}_{n-2} L$.*

Démonstration. Remarquons tout d'abord que d'après le lemme 4.1.3 on a

$$d\Delta(f, g, H) = \mathcal{O}(g) - \mathcal{O}(f) = 0,$$

puisque nous avons supposé que f et g sont définis sur $\mathrm{sk}_{n+1} L$. En conséquence, nous pouvons effectivement considérer la classe de $\Delta(f, g, H)$ dans $H^n(QL/QN, \pi_n M)$. Supposons qu'elle est nulle. Alors il existe $\alpha \in \mathrm{Hom}(QL/QN, \pi_n(M))^{n-1}$ tel que $d\alpha = \Delta(f, g, H)$; or d'après le lemme 4.2.3, il existe une homotopie $\tilde{H} : \mathrm{sk}_{n-1} L \to M^I$ de f à g telle que $\tilde{H}|_{\mathrm{sk}_{n-2} L} = H|_{\mathrm{sk}_{n-2} L}$ et $\Gamma(H, \tilde{H}) = -\alpha$. En utilisant le lemme 4.2.2, nous obtenons

$$d\Gamma(H, \tilde{H}) = -d\alpha = \Delta(f, g, \tilde{H}) - \Delta(f, g, H),$$

ce qui implique $\Delta(f, g, \tilde{H}) = 0$. Nous appliquons alors le lemme 4.1.2 pour étendre $\tilde{H}$ en une homotopie de f à g à $\mathrm{sk}_n L$.

Réciproquement, s'il existe une homotopie $\tilde{H} : \mathrm{sk}_n L \to M^I$ de f à g qui coïncide avec H sur $\mathrm{sk}_{n-2} L$ alors, d'après le lemme 4.2.2, $d\Gamma(H, \tilde{H}) = \Delta(f, g, \tilde{H}) - \Delta(f, g, H) = -\Delta(f, g, H)$. Donc la classe de $\Delta(f, g, H)$ s'annule dans $H^n \mathrm{Hom}(QL/QN, \pi_n(M))$. □

5. Construction "+"

La construction "+" de Quillen [Qu4, Lo1] permet d'obtenir à partir d'un CW-complexe X dont le π_1 est un groupe parfait, un couple (i, X^+), où X^+ est un CW-complexe simplement connexe et où $i : X \to X^+$ réalise un isomorphisme en homologie. T. Pirashvili [P] s'est inspiré de cette construction pour obtenir la construction "+" des algèbres de Lie simpliciales. Notre but est de montrer qu'une telle construction est encore possible pour les algèbres différentielles graduées sur une opérade de Koszul.

Rappelons les notations et définitions vues dans les sections précédentes et nécessaires à la construction "+". Soit $\mathcal{P}$ une opérade de Koszul unitale (i.e. $\mathcal{P}(0) = 0$ et $\mathcal{P}(1) = K$). Soit A une $\mathcal{P}$-algèbre différentielle graduée. Le module des indécomposables de A, noté QA, est le quotient de A par A^2, qui est l'image du produit

$$\bigoplus_{k\geq 2} (\mathcal{P}(k)\otimes_{S_k} A^{\otimes k}) \to A.$$

On dit que A est *parfaite* si $QA = 0$ ou $A^2 = A$.

L'homotopie d'une $\mathcal{P}$-algèbre différentielle graduée A, notée $\pi_*(A)$, est l'homologie du complexe sous-jacent ; si $\pi_0(A) = 0$, alors A est dite *connexe*. Un modèle quasi-libre de A est une $\mathcal{P}$-algèbre différentielle graduée quasi-libre F munie d'un morphisme $F \to A$ qui réalise un isomorphisme en homotopie. Rappelons qu'une $\mathcal{P}$-algèbre différentielle graduée quasi-libre F, est une $\mathcal{P}$-algèbre graduée libre, c'est-à-dire F est de la forme $T(\mathcal{P}, V)$ avec la notation

$$T(\mathcal{P}, V) = \bigoplus_{k\geq 1} (\mathcal{P}(k)\otimes_{S_k} V^{\otimes k}).$$

Nous définissons l'homologie de Quillen de A, notée $H_*^{\mathrm{Q}}(A)$, comme l'homologie du complexe QF ; l'homologie de Quillen de A est indépendante du choix de F (voir 2.7.5). Rappelons que

$$H_0^{\mathrm{Q}}(A) = Q\pi_0(A) \text{ (voir 2.7.1) ;}$$

par suite, si $\pi_0(A)$ est parfait, alors $H_0^{\mathrm{Q}}(A) = 0$.

Considérons une $\mathcal{P}$-algèbre différentielle graduée A dont le π_0 est parfait et choisissons un modèle quasi-libre F de A. Nous procédons à la construction "+" de F. Plus précisément, nous construisons un couple (i, F^+), où F^+ est connexe et $i : F \to F^+$ est un morphisme quasi-libre qui réalise un isomorphisme en homologie de Quillen (voir théorème 5.1.1). La démonstration de l'existence se fait par adjonction cellulaire – comme dans le cas topologique – et nous montrons l'unicité à l'aide de la théorie de l'obstruction développée dans la partie précédente.

Enfin, nous donnons quelques exemples de calcul d'homotopie de la construction "+". Notamment, nous déterminons l'homotopie de $\mathrm{sl}(A)^+$ dans la catégorie des algèbres de Lie et dans la catégorie des algèbres de Leibniz.

5.1. Existence et unicité de la construction "+"

5.1.1. Théorème. *Soit $F = T(\mathcal{P}, V)$ une $\mathcal{P}$-algèbre différentielle graduée quasi-libre telle que $\pi_0(F)$ soit parfait. Alors il existe un morphisme quasi-libre $i : F \to F^+$ tel que $\pi_0(F^+) = 0$ et $H_*^{\mathrm{Q}}(i)$ soit un isomorphisme. De plus, le morphisme i est universel à homotopie près parmi les morphismes $F \to G$ tels que G soit connexe. En particulier le couple (i, F^+) est unique à homotopie près.*

Démonstration. Nous montrons en premier lieu l'existence d'une telle construction, en employant les même méthodes que dans le cas classique. Tout d'abord, nous ajoutons des 1-cellules de manière à "tuer" $\pi_0(F)$; ensuite, nous ajoutons des 2-cellules dans le but de faire disparaître l'homologie apparue dans la première étape. Rappelons qu'il y a un décalage de degrés entre le cas classique et notre cas, (voir 3.1.1) ; c'est la raison pour laquelle les 2 et 3-cellules deviennent des 1 et 2-cellules, et pour laquelle la notion de simplement connexe se transforme en connexe.

Première étape. Soit M un sous-ensemble de F_0 qui engendre la $\mathcal{P}$-algèbre $\pi_0(F)$. Soit $F' = T(\mathcal{P}, V \underset{m\in M}{\oplus} Ke_m)$ avec $|e_m| = 1$ et $d(e_m) = m$. Le morphisme $j : F \to F'$ est quasi-libre et il est clair que $\pi_0(F') = 0$. Le diagramme de suites exactes courtes

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & F & \xrightarrow{j} & F' & \to & \mathrm{Coker}(j) & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & QF & \xrightarrow{Qj} & QF' & \to & \mathrm{Coker}(Qj) & \to & 0
\end{array}$$

induit le diagramme en homologie suivant :

$$\begin{array}{lcll}
H_1(F') & & & \\
{\scriptstyle\phi_1}\downarrow & & & \\
H_1(QF') & \xrightarrow{p} & H_1\,\mathrm{Coker}(Qj) & \to H_0(QF).
\end{array}$$

Par définition, on a : $H_1(F') = \pi_1(F')$ et $H_1(QF') = H_1^{\mathrm{Q}}(F')$; le morphisme ϕ_1 n'est alors rien d'autre que le morphisme d'Hurewicz. Puisque $\pi_0(F') = 0$, alors ϕ_1 est un isomorphisme d'après le théorème d'Hurewicz 3.2.2.

Par hypothèse $\pi_0(F)$ est parfait, donc $H_0(QF) = H_0^{\mathrm{Q}}(F) = 0$. En conséquence, la composée des applications $p\phi_1$ est surjective. L'isomorphisme

$$\mathrm{Coker}(Qj) \simeq \underset{m\in M}{\oplus} Ke_m$$

implique que pour tout $m \in M$, il existe $\alpha_m \in F'_1$ tel que $d\alpha_m = 0$ et tel que la projection de α_m sur $\underset{m\in M}{\oplus} Ke_m$ soit précisément e_m.

Deuxième étape. Posons

$$F^+ = T(\mathcal{P}, V \underset{m\in M}{\oplus} Ke_m \underset{m\in M}{\oplus} K\sigma_m),$$

avec $|\sigma_m| = 2$ et $d\sigma_m = \alpha_m$. Il est clair que $i\ : F \to F^+$ est un morphisme quasi-libre et que $\pi_0(F^+) = 0$. De l'isomorphisme

$$\mathrm{Coker}(Qi) \simeq \underset{m\in M}{\oplus} Ke_m \underset{m\in M}{\oplus} K\sigma_m,$$

nous déduisons que $\mathrm{Coker}(Qi)$ est acyclique. Donc i réalise un isomorphisme en homologie de Quillen et nous avons achevé la construction. □

Nous allons établir un lemme général qui entraine l'universalité et l'unicité à homotopie près de la construction "+".

5.1.2. Lemme. *Soient $F = T(\mathcal{P}, V)$ une $\mathcal{P}$-algèbre différentielle graduée quasi-libre et $i\ : F \to F'$ un morphisme quasi-libre. Si $H_*^{\mathrm{Q}}(i)$ est un isomorphisme, alors pour tout morphisme $f\ : F \to G$ avec G connexe, le diagramme*

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & G \\ F' \arrow[ur, dashed] & \end{tikzcd}$$

admet un relèvement unique à homotopie près.

Démonstration. Les hypothèses de la théorie de l'obstruction sont vérifiées : la $\mathcal{P}$-algèbre différentielle graduée F est quasi-libre et le morphisme $F \to F'$ est quasi-libre ; de plus, G est connexe. Posons $F' = F \vee T(\mathcal{P}, W)$, la filtration squelettale de F' étant donnée par

$$\mathrm{sk}_n(F') = F \vee T(\mathcal{P}, \overset{n}{\underset{i=0}{\oplus}} W_i) \quad \text{et} \quad \mathrm{sk}_{-1}(F') = F.$$

Nous pouvons construire un morphisme de $\mathcal{P}$-algèbres différentielles graduées $f_0\ :$ $\mathrm{sk}_0 F' \to G$ tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "f"] \arrow[d] & G \\ \mathrm{sk}_0 F' \arrow[ur, dashed, "f_0"'] & \end{tikzcd}$$

commute, en posant $f_0(W_0) = 0$. La récurrence est alors enclenchée et nous appliquons le théorème 4.1.5 pour construire, étape par étape, un morphisme $f_n : \mathrm{sk}_n F' \to G$ qui étend f puisque, l'espace vectoriel QF'/QF étant acyclique, tous les groupes de cohomologie $H^{n+1} \operatorname{Hom}(QF'/QF, \pi_n(G))$ sont nuls.

Montrons l'unicité à homotopie près d'une telle application. Soient $f', g' : F' \to G$ deux morphismes de $\mathcal{P}$-algèbres différentielles graduées tels que $f'|_F = g'|_F = f$. Cela nous donne une homotopie sur $\mathrm{sk}_{-1} F' = F$ et nous pouvons appliquer le théorème 4.2.4. Les obstructions successives au relèvement de cette homotopie se trouvent dans les groupes de cohomologie $H^n \operatorname{Hom}(QF'/QF, \pi_n(G))$ qui sont nuls. Par conséquent, les morphismes f' et g' sont homotopes. □

En corollaire, nous obtenons l'universalité du morphisme i ; par ailleurs, l'unicité du couple (i, F^+) à homotopie près provient de l'universalité de i.

5.1.3. Proposition. *La construction "+" est fonctorielle à homotopie près dans la catégorie des $\mathcal{P}$-algèbres différentielles graduées quasi-libres.*

Démonstration. C'est une conséquence directe de l'universalité de la construction "+". □

5.1.4. Proposition. *Soient A une $\mathcal{P}$-algèbre différentielle graduée dont le π_0 est parfait, F un modèle quasi-libre de A et F^+ sa construction "+". L'homotopie et l'homologie de Quillen de F^+ ne dépendent pas du choix de F.*

Démonstration. Soient F et G deux modèles quasi-libres de A. D'après la proposition 2.6.6, il existe un morphisme $\phi : F \to G$ qui fasse commuter le diagramme

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r] & A \\ & F \arrow[u] \arrow[ul, dashed, "\phi"] \end{tikzcd}$$

à homotopie près. En particulier ϕ est un isomorphisme en homotopie. En utilisant la proposition précédente, il existe $\tilde{\phi} : F^+ \to G^+$ telle que $\tilde{\phi} i_F = i_G \phi$. Par conséquent, $\tilde{\phi}$ réalise un isomorphisme en homologie entre deux $\mathcal{P}$-algèbres connexes, donc d'après le théorème de Whitehead 3.3.1, il réalise un isomorphisme en homotopie. □

5.1.5. Définition. Soit A une $\mathcal{P}$-algèbre différentielle graduée dont le π_0 est parfait et F un modèle quasi-libre de A. Nous définissons l'homotopie et l'homologie de A^+ par les relations :

$$\pi_*(A^+) = \pi_*(F^+) \quad \text{et} \quad H_*^{\mathrm{Q}}(A^+) = H_*^{\mathrm{Q}}(F^+).$$

5.1.6. Proposition. *Soit A une $\mathcal{P}$-algèbre différentielle graduée dont le π_0 est parfait. Les relations suivantes sont satisfaites :*

$$\pi_0(A^+) = 0 \quad et \quad \pi_1(A^+) \simeq H_1^{\mathrm{Q}}(A) = H_2^{\mathcal{P}}(A).$$

Démonstration. La première relation est contenue dans la définition de la construction "+". La deuxième relation provient du théorème d'Hurewicz 3.2.2 ainsi que de la comparaison entre l'homologie de Quillen et l'homologie opéradique (voir 2.7.7). □

5.2. Calcul de l'homotopie de sl(A)$^+$

Nous nous proposons dans ce paragraphe de calculer l'homotopie de $\mathrm{sl}(A)^+$, où A est une algèbre associative unitaire sur le corps K.

Rappelons que $\mathrm{gl}_r(A)$ désigne l'algèbre de Lie (ou de Leibniz) des matrices carrées de taille r munie du crochet $[\alpha, \beta] = \alpha\beta - \beta\alpha$. L'inclusion canonique $\mathrm{gl}_r(A) \to \mathrm{gl}_{r+1}(A)$ est un morphisme d'algèbres de Lie. Nous notons $\mathrm{gl}(A)$ la limite inductive de ces inclusions canoniques. Soit $\mathrm{sl}(A)$ le noyau de l'application trace

$$\mathrm{Tr}\ : \mathrm{gl}(A) \to A/[A, A].$$

Alors $\mathrm{sl}(A)$ est une algèbre de Lie parfaite. Rappelons que l'homologie de Chevalley-Eilenberg de $\mathrm{sl}(A)$ est l'homologie du complexe suivant :

$$\cdots \to \quad \Lambda^n \mathrm{sl}(A) \quad \xrightarrow{d} \quad \Lambda^{n-1}\mathrm{sl}(A) \quad \to \quad \cdots \to \quad \mathrm{sl}(A) \quad \to \quad 0, \text{ avec}$$

$$d(g_1 \wedge \cdots \wedge g_n) = \sum_{1 \le i < j \le n} (-1)^{i+j-1} [g_i, g_j] \wedge g_1 \wedge \cdots \wedge \hat{g}_i \wedge \cdots \wedge \hat{g}_j \wedge \cdots \wedge g_n.$$

C'est aussi l'homologie opéradique de $\mathrm{sl}(A)$, que nous avons notée $H_*^{\mathcal{L}\mathrm{ie}}(A)$. Comme $\mathrm{sl}(A)$ est une algèbre de Lie parfaite, nous avons

$$H_0^{\mathcal{L}\mathrm{ie}}(\mathrm{sl}(A)) = 0 \quad \text{et} \quad H_1^{\mathcal{L}\mathrm{ie}}(\mathrm{sl}(A)) = 0.$$

Par ailleurs, $\mathrm{sl}(A)$ peut être considérée comme une algèbre de Leibniz et son homologie opéradique, $H_*^{\mathcal{L}\mathrm{eib}}(A)$, est l'homologie de Leibniz de $\mathrm{sl}(A)$, notée $HL(\mathrm{sl}(A))$ par J.-L. Loday (voir par exemple [Lo2]). Rappelons que c'est l'homologie du complexe

$$\cdots \to \quad \mathrm{sl}(A)^{\otimes n} \quad \xrightarrow{d} \quad \mathrm{sl}(A)^{\otimes n-1} \quad \to \cdots \quad \to \quad \mathrm{sl}(A) \quad \to \quad 0, \text{ avec}$$

$$d(g_1 \otimes \cdots \otimes g_n) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (-1)^j g_1 \otimes \cdots \otimes g_{i-1} \otimes [g_i, g_j] \otimes \cdots \otimes \hat{g_j} \otimes \cdots \otimes g_n.$$

Et de même que précédement, nous avons

$$H_0^{\mathcal{L}\mathrm{eib}}(\mathrm{sl}(A)) = 0 \quad \text{et} \quad H_1^{\mathcal{L}\mathrm{eib}}(\mathrm{sl}(A)) = 0.$$

Soit $\mathcal{P}$ une opérade de Koszul unitale ($\mathcal{P}(0) = 0, \mathcal{P}(1) = K$). Nous supposerons par la suite, que pour tout n, l'espace vectoriel $\mathcal{P}(n)$ est de dimension finie. Rappelons que $\mathcal{P}^!$ désigne l'opérade quadratique duale de $\mathcal{P}$ (voir 1.2.4) et qu'une $\mathcal{P}^!$-cogèbre graduée libre est de la forme

$$C(\mathcal{P}^!, V) = \bigoplus_{n \geq 1} (\mathcal{P}^!(n)^* \otimes V^{\otimes n})^{\mathrm{S}_n}, \text{ (voir 1.1.9).}$$

L'homologie opéradique d'une $\mathcal{P}$-algèbre différentielle graduée X est l'homologie du complexe $C_{\mathcal{P}}(X)$ qui est la $\mathcal{P}^!$-cogèbre graduée libre sur sX munie d'une différentielle particulière (voir 1.4.2).

5.2.1. Proposition. *Soit X une $\mathcal{P}$-algèbre différentielle graduée dont l'homologie est une $\mathcal{P}^!$-cogèbre graduée libre : $H_*^{\mathcal{P}}(X) = C(\mathcal{P}^!, V)$. Alors*
a) il existe un quasi-isomorphisme de $\mathcal{P}^!$-cogèbres $C_{\mathcal{P}}(X) \to H_*^{\mathcal{P}}(X)$;
b) si X est connexe, alors $\pi_*(X)$ est isomorphe à $s^{-1}V$.

Démonstration. a) On a l'isomorphisme d'espaces vectoriels suivant :

$$C_{\mathcal{P}}(X) = H_*^{\mathcal{P}}(X) \oplus B_*(X) \oplus Q,$$

où $B_*(X)$ représente le sous-espace vectoriel des bords de X. Ainsi, il existe un morphisme d'espaces vectoriels différentiels gradués $\phi : C_{\mathcal{P}}(X) \to H_*^{\mathcal{P}}(X)$. Donc, il existe un morphisme d'espaces vectoriels différentiels gradués $p\phi : C_{\mathcal{P}}(X) \to V$, où p est la projection de $C(\mathcal{P}^!, V)$ dans V. Par propriété universelle de la cogèbre libre, il existe un unique morphisme de $\mathcal{P}^!$-cogèbres différentielles graduées $\psi : C_{\mathcal{P}}(X) \to H_*^{\mathcal{P}}(X)$ tel que $p\psi = p\phi$. Par ailleurs, toujours par propriété universelle, $\pi_*(\psi)$ est l'unique morphisme de $\mathcal{P}^!$-cogèbres graduées tel que $p\pi_*(\psi) = p\pi_*(\phi)$. Cela implique que ψ est un quasi-isomorphisme.

b) Supposons que X est connexe. Quitte à remplacer X par sa troncature

$$\begin{aligned} &Z_n = X_n \text{ pour } n > 1, \\ &Z_1 = \mathrm{Ker}(d : X_1 \to X_0) \text{ et} \\ &Z_0 = 0, \end{aligned}$$

nous pouvons supposer $X_0 = 0$. Sous ces conditions, on a nécessairement $H_i^{\mathcal{P}}(X) = 0$ pour $i = 0, 1$; donc $V_0 = V_1 = 0$. Par conséquent, le morphisme ψ est un quasi-isomorphisme entre $\mathcal{P}^!$-cogèbres 2-réduites. Le foncteur $T_{\mathcal{P}}$ préserve alors ce quasi-isomorphisme (voir 1.4.5). Remarquons que $C(\mathcal{P}^!, V) = C_{\mathcal{P}}(s^{-1}V)$, où $s^{-1}V$ est considérée comme $\mathcal{P}$-algèbre triviale de différentielle nulle. Alors, les morphismes du diagramme

$$\begin{array}{ccc} T_{\mathcal{P}}C_{\mathcal{P}}(X) & \to & T_{\mathcal{P}}(H_*^{\mathcal{P}}(X)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & & s^{-1}V \end{array}$$

sont tous des quasi-isomorphismes, donc

$$\pi_*(X) \simeq \pi_*(s^{-1}V) = s^{-1}V. \qquad \square$$

5.2.2. Proposition. *Soit A une algèbre associative unitaire. Considérons la construction "+" de* $\mathrm{sl}(A)$ *dans la catégorie des algèbres de Lie différentielles graduées. Alors*

$$\pi_*(\mathrm{sl}(A)^+) \simeq \overline{HC}_*(A),$$

où $\overline{HC}_*(A)$ est l'homologie cyclique de A réduite, c'est-à-dire

$$\overline{HC}_0(A) = 0 \quad \textit{et} \quad \overline{HC}_i(A) = HC_i(A), \ \textit{pour } i > 0.$$

Démonstration. La démonstration utilise essentiellement des résultats déjà connus. Nous savons, d'après le théorème de Loday-Quillen et Tsygan [Lo-Q, Lo2, Ts] qu'il existe un isomorphisme d'algèbres de Hopf

$$H_*^{\mathcal{L}\mathrm{ie}}(\mathrm{gl}(A)) \simeq \Lambda_*(HC(A)[1]).$$

La démonstration de ce théorème se fait en deux étapes. Tout d'abord, on calcule la partie primitive de la cogèbre $H_*^{\mathcal{L}\mathrm{ie}}(\mathrm{gl}(A))$. Pour la deuxième étape, on remarque que la somme directe des matrices [Lo2] confère à $H_*^{\mathcal{L}\mathrm{ie}}(\mathrm{gl}(A))$ une structure d'algèbre de Hopf commutative et co-commutative. Il suffit alors, d'appliquer le théorème de Cartan-Milnor-Moore pour démontrer le résultat. En reprenant la démonstration, il n'est pas difficile de montrer qu'on a l'isomorphisme de cogèbres co-commutatives suivant :

$$H_*^{\mathcal{L}\mathrm{ie}}(\mathrm{sl}(A)) \simeq \Lambda_*(\overline{HC}(A)[1]).$$

Or $H_*^{\mathcal{L}\mathrm{ie}}(\mathrm{sl}(A)^+) = H_*^{\mathcal{L}\mathrm{ie}}(\mathrm{sl}(A))$, et $\mathrm{sl}(A)^+$ est connexe, donc en appliquant la proposition 5.2.1, nous obtenons l'isomorphisme :

$$\pi_*(\mathrm{sl}(A)^+) \simeq \overline{HC}_*(A). \qquad \square$$

5.2.3. Proposition. *Soit A une algèbre associative unitaire. Considérons la construction "+" de* $\mathrm{sl}(A)$ *dans la catégorie des algèbres de Leibniz différentielles graduées. Alors*

$$\pi_*(\mathrm{sl}(A)^+) \simeq \overline{HH}_*(A),$$

où $\overline{HH}_*(A)$ *est l'homologie de Hochschild de A réduite, c'est-à-dire*

$$\overline{HH}_0(A) = 0 \quad \textit{et} \quad \overline{HH}_i(A) = HH_i(A), \ \textit{pour } i > 0.$$

Démonstration. D'après le théorème de Cuvier-Loday [C, Lo2], il existe un isomorphisme d'espaces vectoriels gradués

$$HL(\mathrm{gl}(A)) \simeq \overline{T}(HH(A)[1]).$$

J.-M. Oudom a ammélioré ce théorème en montrant que cet isomorphisme est un isomorphisme de cogèbres de Leibniz-dual graduées [O], et un isomorphisme de groupes abéliens dans la catégorie des $\mathcal{L}\mathrm{eib}^!$-cogèbres graduées, la structure de groupe étant induite par la somme directe des matrices. En reprenant la démonstration (calcul des primitifs, structure de groupe), nous obtenons un isomorphisme de cogèbres de Leibniz-dual graduées :

$$HL(\mathrm{sl}(A)) \simeq \overline{T}(\overline{HH}(A)[1]).$$

Enfin nous appliquons la proposition 5.2.1 pour obtenir le résultat. □

5.2.4. Remarque. Lorsque X est une $\mathcal{P}$-algèbre différentielle graduée parfaite munie d'un produit $X \times X \to X$ qui induit une structure de groupe sur $H_*^{\mathcal{P}}(X)$ dans la catégorie des $\mathcal{P}^!$-cogèbres graduées, nous pouvons appliquer le théorème de structure des groupes de Fresse [Fr3] : alors $H_*^{\mathcal{P}}(X)$ est une $\mathcal{P}^!$-cogèbre graduée libre et, en appliquant la proposition 5.2.1, nous obtenons

$$\pi_*(X^+) \simeq s^{-1}\,\mathrm{Prim}\, H_*^{\mathcal{P}}(X).$$

Bibliographie

[Au] M. Aubry, “Homotopy theory and models” DMV seminar, Band 24 (1995), Birkhäuser.

[Bal] D. Balavoine, *Homology and cohomology with coefficients of an algebra over a quadratic operad*, J. Pure Algebra (à paraître).

[B-L] H.J. Baues, J.-M. Lemaire, *Minimal models in homotopy theory*, Math. Ann. (3)**225** (1977), 219-242.

[Bo-G] A.K. Bousfield, V.K.A.M. Gugenheim, *On PL De Rham theory and rational homotopy type*, Mem. of A.M.S (8)**179** (1976).

[C] C. Cuvier, *Homologie des algèbres de Leibniz*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. **27** (1994), 1-45.

[D-S] W.G. Dwyer, J. Spalinski, *Homotopy theory and model categories* in “Handbook of algebraic topology”, Elsevier (1995).

[F-H-T] Y. Félix, S. Halperin, J.-C. Thomas, *Differential graded algebras in topology*, in “Handbook of algebraic topology”, North-Holland (1995), 829-865.

[F-T] Y. Félix, J.-C. Thomas, *Homotopie rationnelle, dualité et complémentarité des modèles*, Bull. Soc. Math. Belgique **23** (1981), 7-19.

[Fo-M] T.F. Fox, M. Markl, *Distributive laws, bialgebras, and cohomology*, in “Operads : Proceedings of renaissance conferences, J.-L. Loday and al.”, Contemp. Math. **202** (1997), 167-205.

[Fr1] B. Fresse, *Lie theory of formal groups over an operad*, Journal of Algebra **202** (1998), 455-511.

[Fr2] B. Fresse, *Algèbre des descentes et cogroupes dans les algèbres sur une opérade*, Bull. Math. Soc. Fr., à paraître.

[Fr3] B. Fresse, *Cogroups in algebras over an operad are free algebras*, Comment. Math. Helv., à paraître.

[Fr4] B. Fresse, *Homologie de Quillen pour les algèbres de Poisson*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **326** (1998), 1053-1058.

[Ge-J] E. Getzler, J.D.S. Jones, *Operads, homotopy algebra and iterated integrals for double loop spaces*, prepublication, 1994.
Internet : http : //xxx.lanl.gov/abs/hep-th/9403055.

[Gi-K] V. Ginzburg, M. Kapranov, *Koszul duality for operads*, Duke J.Math. (1)**76** (1994), 203-272.

[Gr-M] P.A. Griffiths, J.W. Morgan, “Rational homotopy theory and differential forms”, Progress in Math. **16** (1981), Birkhäuser.

[J] A. Joyal, *Foncteurs analytiques et espèces de structure*, dans “Combinatoire énumérative”, Springer Lecture Notes in Math. **1234** (1986), 126-159.

[Li1] M. Livernet, *Homotopie rationnelle des algèbres de Leibniz*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **325** (1997) 8, 819-823.

[Li2] M. Livernet, *Rational homotopy of Leibniz algebras*, Manus. Math. **96** (1998) 3, 295-315.

[Lo1] J.-L. Loday, *K-théorie algébrique et représentations de groupes*, Ann. scient. Ec. Norm. Sup. 4^e série **9** (1976), 309-377.

[Lo2] J.-L. Loday, “Cyclic homology”, Springer Grund. der Math. Wiss. **301**, 1992.

[Lo3] J.-L. Loday, *Une version non-commutative des algèbres de Lie : les algèbres de Leibniz*, Ens. math. **39** (1993), no 3-4, 269-293.

[Lo4] J.-L. Loday, *Cup-product for Leibniz cohomology and dual Leibniz algebras*, Math. Scand. **77** (1995), 189-196.

[Lo5] J.-L. Loday, *La renaissance des opérades*, dans “Séminaire Bourbaki, 1994-1995”, Astérisque **237** (1996), 47-74.

[Lo-P] J.-L. Loday, T. Pirashvili, *Universal enveloping algebras of Leibniz algebras and (co)homology*, Math. Ann. **296** (1993), 291-398.

[Lo-Q] J.-L. Loday, D. Quillen, *Cyclic homology and the Lie algebra homology of matrices*, Comment. Math. Helvetici **59** (1984), 565-591.

[ML1] S. Mac Lane, “Homology”, Springer Grund. der Math. Wiss. **114**, 1963.

[ML2] S. Mac Lane, “Categories for the working mathematicians”, Springer Gr. Texts in Math. **5**, 1971.

[M] M. Markl, *Distributive laws and Koszulness*, Ann. Inst. Fourier **46** (1996), 307-323.

[May] J.P May, “The geometry of iterated loop spaces”, Springer Lecture Notes in Maths **271**, 1972.

[Mo] J.C. Moore, *Differential homological algebra*, Proc. Int. Cong. Math. I, (1970), 1-5.

[Ne] J. Neisendorfer, *Lie algebras, coalgebras, and rational homotopy theory for nilpotent spaces*, Pac. J. Math. (2)**74** (1978), 429-460.

[O] J.-M. Oudom, *Coproduct and cogroups in the category of graded dual Leibniz algebras*, in “Operads : proceedings of renaissance conferences, 1995”, Contemp. Math. **202** (1997), 115-135.

[P] T. Pirashvili, “+”*-construction for Lie algebras*, Bull. Acad. Sci. Geor. SSR **118**, n°2, (1985) 253-258.

[Pr] S. Priddy, *Koszul resolutions*, Trans. AMS **152** (1970), 39-60.

[Qu1] D. Quillen, “Homotopical Algebra”, Springer Lecture Notes in Math. **43**, 1967.

[Qu2] D. Quillen, *On the (co)homology of commutative rings*, Proc. Symp. Pure Math. **17** (1968), 65-87.

[Qu3] D. Quillen, *Rational Homotopy theory*, Ann. of Math. (2)**90** (1969), 205-295.

[Qu4] D. Quillen, *Cohomology of groups*, Actes Congrès Intern. Math. **2** (1970), 47-51.

[R-T] M. Rothenberg, G. triantafillou, *An algebraic model for G-simple homotopy types*, Math. Ann. **269** (1984), 301-331.

[Sc-St] M. Schlessinger, J. Stasheff, *The Lie algebra structure of tangent cohomology and deformation theory*, J. Pure Appl. Algebra **38** (1985), 313-322.

[Su] D. Sullivan, *Infinitesimal computations in Topology*, Publ. I.H.E.S. **47**(1977), 269-331.

[Sw] M.E. Sweedler, “Hopf algebras”, Benjamin, 1969.

[Ta] D. Tanré, “Homotopie rationnelle : Modèles de Chen, Quillen, Sullivan”, Springer Lecture Notes in Math. **1025**, 1980.

[Ts] B.L. Tsygan, *The homology of matrix Lie algebras over rings and the Hochschild homology* (en russe), Uspekhi Mat. Nauk. **38** (1983), 217-218, Russ. Math. Survey (2) **38** (1983), 198-199 (traduction anglaise).