Université de Rennes 1, Licence de Mathématiques, Intégration 1

Examen partiel, 14 novembre 1998, 10h30–12h30, Hall du second cycle

Aucun document n'est autorisé.

Exercice 1 (7 points)
1.1. Donner la définition d'une tribu sur un ensemble.
1.2. Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré où μ est une mesure positive telle que $\mu(X) = 1$. On considère

$$\mathcal{T} = \{A \in \mathcal{M},\ \mu(A) = 0 \text{ ou } \mu(A) = 1\}.$$

Montrer que $\mathcal{T}$ est une tribu sur X.

Exercice 2 (6 points)
Soit $(X, \mathcal{M})$ un espace mesurable et $(\mu_j)_{j\in\mathbb{N}}$ une suite de mesures positives définies sur $\mathcal{M}$. On suppose que pour tout $A \in \mathcal{M}$ et pour tout $j \in \mathbb{N}$, $\mu_j(A) \leq \mu_{j+1}(A)$. Pour $A \in \mathcal{M}$, on pose

$$\mu(A) = \sup_{j\in\mathbb{N}} \mu_j(A).$$

2.1. Montrer que μ est une mesure positive définie sur $\mathcal{M}$.
2.2. Soit $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ une fonction mesurable. Montrer que

$$\int_X f d\mu = \sup_{j\in\mathbb{N}} \int_X f d\mu_j \qquad \textit{(On pourra commencer par examiner le cas où } f \textit{ est étagée).}$$

2.3. On considère l'espace mesurable $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ et pour $j \in \mathbb{N},\ A \subset \mathbb{N}$, on définit $\nu_j(A) = \mathrm{Card}(A \cap [j, +\infty[)$($\mathrm{Card}E$ désigne le nombre d'éléments de E si E est fini, $+\infty$ sinon). Montrer que ν_j est une mesure positive définie sur $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ telle que, pour tout $A \subset \mathbb{N}$, $\nu_j(A) \geq \nu_{j+1}(A)$. On pose

$$\nu(A) = \inf_{j\in\mathbb{N}} \nu_j(A).$$

Montrer que $\nu(\mathbb{N}) = +\infty$ et que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\nu(\{k\}) = 0$. En déduire que ν n'est pas une mesure sur $\mathbb{N}$.

Exercice 3 (7 points)
Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré où μ est une mesure positive. Soit $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ une application mesurable telle que

$$\int_X f d\mu < \infty.$$

3.1. Montrer que $N = \{x \in X, f(x) = +\infty\}$ appartient à $\mathcal{M}$. Montrer que $\mu(N) = 0$.
3.2. Soit $\epsilon > 0$. Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout $E \in \mathcal{M}$ vérifiant $\mu(E) \leq \alpha$, on ait

$$\int_E f d\mu < \epsilon.$$