Université de Rennes 1, Licence de Mathématiques, Intégration 1

Examen partiel, 20 novembre 1999, 10h30–12h30

Salles 018, 016, 014, 011, 009, Bâtiment 2

Justifiez vos affirmations. Séparez nettement les exercices. Aucun document n'est autorisé.

Exercice 1 (7 points)
1.1. Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré où μ est une mesure positive. Donner l'énoncé du théorème de convergence dominée de Lebesgue *(on pourra donner l'énoncé le plus simple sans tenir compte des ensembles de mesure nulle).*
1.2. Montrer que la suite $u_n = \displaystyle\int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \cos x \, dx$ est convergente et calculer sa limite.

Exercice 2 (7 points)
Soit $\mathcal{B}$ la tribu de Borel sur $\mathbb{R}$ et soit μ une mesure positive définie sur $\mathcal{B}$ telle que $\mu(K) < +\infty$ pour K compact (*on dira que μ est une mesure borélienne sur* $\mathbb{R}$*).* Soit

$$D = \{a \in \mathbb{R}, \mu(\{a\}) > 0\}.$$

2.1. Soient n, l des entiers ≥ 1. On pose $D_{n,l} = \{a \in \mathbb{R}, |a| \leq n \text{ et } \mu(\{a\}) \geq 1/l\}$. Montrer que $D_{n,l}$ est fini. Montrer que D est dénombrable.
2.2. On pose pour $E \in \mathcal{B}$, $\lambda(E) = \mu(D \cap E)$. Montrer que cela a un sens et que λ est une mesure borélienne sur $\mathbb{R}$. Montrer que

$$\lambda = \sum_{a \in D} \mu(\{a\}) \delta_a,$$

où δ_a est la masse de Dirac en a (i.e. $\delta_a(E) = \mathbf{1}_E(a)$).
2.3. Montrer que $\mu = \lambda + \nu$ où ν est une mesure borélienne sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\nu(\{x\}) = 0$.

Exercice 3 (6 points)
Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré où μ est une mesure positive. Soit $f_n : X \to \mathbb{C}$ une suite de fonctions mesurables qui converge simplement vers f.
3.1. Soit p un réel ≥ 1. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n \in \mathcal{L}^p(\mu)$ et que la suite $\displaystyle\int_X |f_n|^p d\mu$ converge dans $\mathbb{R}_+$. Montrer que $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$.
3.2. On suppose en outre que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_X |f_n|^p d\mu = \int_X |f|^p d\mu$. Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \int_X |f_n - f|^p d\mu = 0$$

(on pourra considérer les suites $g_n = |f_n - f|^p - |f_n|^p + |f|^p$, $h_n = |g_n| \mathbf{1}_{\{|f_n| \leq \lambda |f|\}}$ où λ est un paramètre positif).