Université de Rennes 1, Licence de Mathématiques, Intégration 1

Corrigé de l'examen partiel du 20 novembre 1999

Exercice 1. 1.2. On pose $f_n(x) = \mathbf{1}_{[0,n]}(x)\left(1-\frac{x}{n}\right)^n \cos x$. La fonction f_n est mesurable comme produit d'une fonction mesurable ($\mathbf{1}_{[0,n]}$) et d'une fonction continue. En outre $\lim_n f_n(x) = \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x)e^{-x}\cos x$. De plus, comme pour $\theta \in [0,1[$, on a $\ln(1-\theta)+\theta \le 0$ et par conséquent (avec $\theta = x/n$)

$$|f_n(x)| \le \mathbf{1}_{[0,n]}(x)\left(1-\frac{x}{n}\right)^n \le \mathbf{1}_{[0,n]}(x)e^{-x} \le \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x)e^{-x} = g(x), \qquad 0 \le g \in L^1(\mathbb{R}),$$

le théorème de convergence dominée de Lebesgue donne $\lim u_n = \int_0^{+\infty} e^{-x}\cos x\, dx = \operatorname{Re}\int_0^{+\infty} e^{-x(1+i)}dx = \operatorname{Re} 1/(1+i) = 1/2$.

Exercice 2. 2.1. Soient n, l des entiers ≥ 1. On a posé $D_{n,l} = \{a \in \mathbb{R}, |a| \le n \text{ et } \mu(\{a\}) \ge 1/l\}$. Soient $a_1, \dots, a_m$ des points distincts de $D_{n,l}$. On a

$$+\infty > \mu([-n,+n]) \ge \mu(\{a_1,\dots,a_m\}) = \sum_{1\le j\le m} \mu(\{a_j\}) \ge m/l$$

et par conséquent $m \le \mu([-n,+n])l < +\infty$, ce qui prouve que $D_{n,l}$ est fini. Si $a \in D$, on peut trouver un entier $l \ge 1$ tel que $\mu(\{a\}) \ge 1/l$. Comme $|a| \le E(|a|)+1 = n$, on obtient $a \in D_{n,l}$. Ceci implique que $D \subset \cup_{n\ge1,l\ge1} D_{n,l}$. Comme $D_{n,l} \subset D$ on trouve que D est dénombrable comme réunion dénombrable des ensembles finis $D_{n,l}$.
2.2. En particulier D est un borélien, donc si $E \in \mathcal{B}$, $D \cap E \in \mathcal{B}$. On peut donc poser $\lambda(E) = \mu(D\cap E)$. Ceci définit une mesure borélienne car $\lambda(\emptyset) = \mu(\emptyset) = 0$, et si les E_n sont des boréliens deux à deux disjoints, et K est un compact,

$$\lambda(\cup_{n\in\mathbb{N}}E_n) = \mu(\cup_{n\in\mathbb{N}}(E_n\cap D)) = \sum_{n\in\mathbb{N}}\mu(E_n\cap D) = \sum_{n\in\mathbb{N}}\lambda(E_n), \qquad \lambda(K) = \mu(K\cap D) \le \mu(K) < +\infty.$$

Si $D = \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, on a

$$\lambda(E) = \mu(D\cap E) = \mu(\{a_n, a_n \in E\}) = \sum_{n, a_n\in E}\mu(\{a_n\}) = \sum_{n\in\mathbb{N}}\mu(\{a_n\})\delta_{a_n}(E) = \sum_{a\in D}\mu(\{a\})\delta_a(E), \text{qed.}$$

2.3. On a pour $E \in \mathcal{B}$, $\mu(E) = \mu(E\cap D) + \mu(E\cap D^c) = \lambda(E) + \nu(E)$, avec $\nu(E) = \mu(E\cap D^c)$. On démontre que ν est une mesure borélienne comme en 2.2. Si $x \in D$, $\nu(\{x\}) = \nu(\{x\}\cap D^c) = \nu(\emptyset) = 0$. Si $x \notin D$, $0 = \mu(\{x\}) = \lambda(\{x\}) + \nu(\{x\}) = \nu(\{x\})$. Finalement, pour tout x, on a $\nu(\{x\}) = 0$.

Exercice 3. 3.1. La fonction f est mesurable comme limite simple d'une suite de fonctions mesurables. En outre, le lemme de Fatou implique que

$$\int_X |f|^p d\mu = \int_X \liminf |f_n|^p d\mu \le \liminf \int_X |f_n|^p d\mu = \lim \int_X |f_n|^p d\mu < +\infty.$$

3.2. On pose $g_n = |f_n - f|^p - |f_n|^p + |f|^p$ et on examine pour $\lambda > 0$ fixé,

$$\int_X |g_n| d\mu = \underbrace{\int_X |g_n|\mathbf{1}_{\{|f_n|\le\lambda|f|\}}d\mu}_{\varepsilon_\lambda(n)} + \int_X |g_n|\mathbf{1}_{\{|f_n|>\lambda|f|\}}d\mu.$$

On remarque que $|g_n|\mathbf{1}_{\{|f_n|\le\lambda|f|\}}$ tend simplement vers 0 car g_n tend simplement vers 0. En outre,

$$\mathbf{1}_{\{|f_n|\le\lambda|f|\}}|g_n| \le \mathbf{1}_{\{|f_n|\le\lambda|f|\}}\Big(|f_n|^p + |f|^p + \big||f_n|+|f|\big|^p\Big) \le |f|^p(\lambda^p + 1 + (\lambda+1)^p) \in \mathcal{L}^1(\mu).$$

Le théorème de convergence dominée implique que $\lim_n \varepsilon_\lambda(n) = 0$. De plus on a ($f_n \ne 0$ sur $\{|f_n| > \lambda|f|\}$)

$$|g_n|\mathbf{1}_{\{|f_n|>\lambda|f|\}} = \big||f_n - f|^p - |f_n|^p + |f|^p\big|\mathbf{1}_{\{|f_n|>\lambda|f|\}} = |f_n|^p\big||1-f/f_n|^p - 1 + |f/f_n|^p\big|\mathbf{1}_{\{|f_n|>\lambda|f|\}}.$$

Or pour $|z| < 1$, on a
$$\big||1-z|^p - 1\big| \leq p2^{p-1}\big||1-z|-1\big| \leq p2^{p-1}|z|,$$
la première inégalité venant des accroissements finis pour la fonction $t \mapsto t^p$ entre 1 et $|1-z|$, la seconde est due aux inégalités triangulaires
$$|1-z| \leq 1+|z|, \qquad \text{et} \qquad 1 \leq |1-z|+|z|.$$
Par suite, pour $\lambda > 1$, on a $\quad |g_n|\mathbf{1}_{\{|f_n|>\lambda|f|\}} \leq |f_n|^p(1+p2^{p-1})/\lambda, \quad$ ce qui implique
$$\int_X |g_n| d\mu \leq \epsilon_n(\lambda) + \frac{1+p2^{p-1}}{\lambda}\int_X |f_n|^p d\mu.$$
On obtient par conséquent pour tout $\lambda > 1$,
$$\limsup_{n\to\infty}\int_X |g_n| d\mu \leq \frac{p2^{p-1}+1}{\lambda}\lim_{n\to\infty}\int_X |f_n|^p d\mu,$$
ce qui implique
$$\lim_n \int_X |g_n| d\mu = 0, \qquad \text{et donc} \qquad \lim_n \int_X g_n d\mu = 0.$$
En reprenant l'expression de g_n, on trouve
$$0 = \lim_n \left(\int_X \Big(|f_n - f|^p - |f_n|^p + |f|^p\Big) d\mu\right) = \lim_n \left(\int_X |f_n - f|^p d\mu - \int_X |f_n|^p d\mu + \int_X |f|^p d\mu\right).$$
Comme on a supposé que
$$\lim_n \int_X |f_n|^p d\mu = \int_X |f|^p d\mu,$$
on en déduit le résultat
$$\lim_n \int_X |f_n - f|^p d\mu = 0.$$