Université de Rennes 1, Licence de Mathématiques, Intégration 1

Examen final, vendredi 21 janvier 2000, 8h–11h

Salle d'examens, Bâtiment 27

Justifiez vos affirmations. Séparez nettement les exercices. Aucun document n'est autorisé.

Exercice 1 (7 points)

1.1. Soit f une fonction de $L^1(\mathbb{R}^2)$ telle que $\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)dxdy = 1$. Calculer $I_1 = \displaystyle\iint_{\mathbb{R}^2} f(2x+y, x-y)\, dxdy$.

1.2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur le nombre réel l pour que

$$I_2 = \iiint_{\mathbb{R}^3} \left(1+\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^{-l} dxdydz < +\infty.$$

1.3. Soient a, b, c des reéls > 0. Calculer le volume I_3 de l'ellipsoïde $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} \leq 1\}$.

1.4. Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré où μ est une mesure positive. Donner l'énoncé de l'inégalité de Hölder.

Exercice 2 (6 points)

Soit u une fonction de $L^1(\mathbb{R})$. On pose, pour $\xi \in \mathbb{R}$, $\widetilde{u}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} u(x)\cos(x\xi)\, dx$.

2.1. Montrer que $\widetilde{u}$ appartient à L^∞. Montrer que la fonction $\widetilde{u}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

2.2. Montrer que si φ est de classe C^1 et à support compact, alors $\lim\limits_{|\xi|\to+\infty} \widetilde{\varphi}(\xi) = 0$. *On pourra faire une intégration par parties.*

2.3. Montrer que $\lim\limits_{|\xi|\to+\infty} \widetilde{u}(\xi) = 0$. *On pourra utiliser la densité des fonctions C^1_c dans $L^1(\mathbb{R})$.*

Exercice 3 (7 points)

Soit n un entier ≥ 3. Pour $x \in \mathbb{R}^n$, on note $\|x\|$ la norme euclidienne de x. Soit $p \in [1, +\infty]$; on rappelle qu'une fonction mesurable $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ appartient à L^p_{loc} si pour tout compact K de $\mathbb{R}^n$, $\mathbf{1}_K f$ appartient à $L^p(\mathbb{R}^n)$.

3.1. On pose $E(x) = \|x\|^{2-n}$ et $p_n = \frac{n}{n-2}$. Montrer que E appartient à $\cap_{1\leq p<p_n} L^p_{\text{loc}}$, et $E \notin L^{p_n}_{\text{loc}}$.

3.2. Soit $q \in]n/2, +\infty]$ et soit F une fonction de $L^q(\mathbb{R}^n)$ à support compact. On pose

$$C_F(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \|x-y\|^{2-n} F(y)dy.$$

Montrer que C_F appartient à L^∞_{loc}.

3.3. Soit φ une fonction définie sur $\mathbb{R}^n$, deux fois continûment différentiable et à support compact. Montrer que C_φ est deux fois différentiable.

3.4. Soit $\epsilon > 0$ et φ vérifiant les hypothèses de 3.3. Soit χ une fonction $C^\infty(\mathbb{R}, [0,1])$ telle que

$$\chi(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t \leq 1, \\ 1 & \text{pour } t \geq 2. \end{cases}$$

On pose $\triangle\varphi = \displaystyle\sum_{1\leq j\leq n} \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_j^2}$ et $I(\varphi,\epsilon) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \|y\|^{2-n} \chi(\|y\|/\epsilon)(\triangle\varphi)(y)dy$. Montrer que

$$\lim_{\epsilon\to 0_+} I(\varphi,\epsilon) = C_{\triangle\varphi}(0) \qquad \text{puis que} \qquad C_{\triangle\varphi}(0) = \alpha_n\varphi(0)$$

où α_n est une constante dépendant de n *(on pourra calculer préalablement $\triangle(\theta(\|x\|))$ où θ est une fonction deux fois différentiable, nulle au voisinage de l'origine).*

3.5. Soit F vérifiant les hypothèses de 3.2. Montrer que pour toute fonction φ, deux fois continûment différentiable et à support compact,

$$\int_{\mathbb{R}^n} C_F(x)(\triangle\varphi)(x)dx = \alpha_n \int_{\mathbb{R}^n} F(x)\varphi(x)dx.$$