Université de Rennes 1, Licence de Mathématiques, Intégration 1

Examen final, lundi 4 septembre 2000, 8h–11h

Hall des amphithéâtres, Bâtiment 42

Justifiez vos affirmations. Séparez nettement les exercices. Aucun document n'est autorisé.

Exercice 1 (7 points)
On désigne par B la boule unité de $\mathbb{R}^3$ pour la norme euclidienne.
1.1.*(3 points)* Donner une condition nécessaire et suffisante sur le réel α pour que

$$I(\alpha) = \iiint_B (x^2 + y^2 + z^2)^{-\alpha/2} dxdydz < +\infty.$$

Lorsque cette condition est vérifiée, calculer $I(\alpha)$.
1.2.*(2 points)* Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré où μ est une mesure positive. Donner l'énoncé de l'inégalité de Minkowski.
1.3.*(2 points)* Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré où μ est une mesure positive. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{M}$ telle que $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) < +\infty$. Montrer que

$$\mu\Big(\cap_{n\geq 0}(\cup_{k\geq n} A_k)\Big) = 0.$$

Exercice 2 (6 points)
2.1.*(2 points)* Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré où μ est une mesure positive telle que $\mu(X) < +\infty$. Soit u appartenant à $L^\infty(\mu)$, $u \neq 0$ dans $L^\infty(\mu)$. On pose $\alpha_n = \int_X |u|^n d\mu$. Montrer que $0 < \alpha_n < +\infty$.
2.2.*(4 points)* Démontrer que $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = \|u\|_{L^\infty(\mu)}$. *On pourra remarquer qu'il est facile de majorer le quotient α_{n+1}/α_n, puis que l'on peut majorer α_n par une expression faisant intervenir α_{n+1} en utilisant l'inégalité de Hölder.*

Exercice 3 (7 points)
Soit $n \geq 1$ un entier. Pour $x \in \mathbb{R}^n$, $\|x\|$ désigne la norme euclidienne de x. Pour $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, on pose

$$E(t,x) = \begin{cases} (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} \exp -\dfrac{\|x\|^2}{4t} & \text{si} \quad t > 0, \\ 0 & \text{si} \quad t \leq 0. \end{cases}$$

3.1.*(0,5)* Montrer que, pour tout T réel, E appartient à $L^1(]-\infty, T] \times \mathbb{R}^n)$ *(on rappelle que $\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi s^2} ds = 1$).*
3.2.*(0,5)* Pour $t > 0$, on définit sur $\mathbb{R}^n$ la fonction $e(t)$ en posant $e(t)(x) = E(t, x)$. Montrer que pour tout $t > 0$, $e(t) \in L^1(\mathbb{R}^n)$.
3.3.*(2 points)* Soit ψ appartenant à $L^1(\mathbb{R}^n)$. Pour $t > 0$, on pose $u(t) = e(t) * \psi$. Montrer que pour tout $t > 0$, $u(t) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ et que

$$\lim_{t\to 0_+} u(t) = \psi \qquad \text{dans } L^1(\mathbb{R}^n).$$

3.4.*(2 points)* On suppose dans la suite que ψ est continue à support compact. Pour $t > 0$ et $x \in \mathbb{R}^n$, on pose $U(t, x) = u(t)(x)$. Montrer que $U \in C^\infty(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^n)$.
3.5.*(2 points)* Montrer que pour $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^n$, on a $\dfrac{\partial U}{\partial t}(t,x) = \sum_{1\leq j\leq n} \dfrac{\partial^2 U}{\partial x_j^2}(t,x)$.