**Université de Rennes 1, Licence de Mathématiques, Intégration 1**
**Corrigé de l'examen final du 5 septembre 2000**

**Exercice 1.**
1.1. La CNS vue en cours est $\alpha < 3$. On a

$$I(\alpha) = \int_0^1 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^{2-\alpha} \sin\varphi dr d\varphi d\theta = 4\pi \left[\frac{r^{3-\alpha}}{3-\alpha}\right]_0^1 = \frac{4\pi}{3-\alpha}.$$

1.3. On pose $B_n = \cup_{k\geq n} A_k$. On a

$$\mu(B_0) \leq \sum_{k\geq 0} \mu(A_k) < +\infty, \qquad B_{n+1} \subset B_n = B_{n+1} \cup A_n,$$

et par conséquent

$$\mu(\cap_{n\geq 0} B_n) = \lim_n \mu(B_n) = \inf_n \mu(B_n) \leq \inf_n \Big(\sum_{k\geq n} \mu(A_k)\Big) = 0$$

car $\sum_{k\geq n} \mu(A_k)$ est le reste d'une série convergente.

**Exercice 2.**
2.1. Comme $u \neq 0$ dans $L^\infty$, on a $\|u\|_{L^\infty} > 0$, et donc pour tout $n \geq 1$, $\|u\|_{L^n} > 0$. En outre, on a

$$0 < \alpha_n \leq \mu(X)\|u\|_{L^\infty}^n < +\infty.$$

2.2. On a

$$0 < \alpha_{n+1} = \int_X |u|^{n+1} d\mu \leq \int_X |u|^n d\mu \|u\|_{L^\infty} = \alpha_n \|u\|_{L^\infty}$$

d'où

$$\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} \leq \|u\|_{L^\infty}.$$

De plus, en utilisant l'inégalité de Hölder, on obtient

$$\alpha_n = \int_X |u|^n d\mu \leq \Big(\int_X |u|^{n\frac{n+1}{n}} d\mu\Big)^{\frac{n}{n+1}} \Big(\int_X d\mu\Big)^{\frac{1}{n+1}} = \alpha_{n+1}^{\frac{n}{n+1}} \mu(X)^{\frac{1}{n+1}}$$

ce qui donne

$$\alpha_n^{n+1} \leq \alpha_{n+1}^n \mu(X)$$

et par suite

$$\alpha_n \leq (\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n})^n \mu(X), \qquad \text{soit} \qquad \alpha_n^{\frac{1}{n}} \leq \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}\mu(X)^{\frac{1}{n}} \leq \|u\|_{L^\infty}\mu(X)^{\frac{1}{n}}.$$

Il nous suffit alors de montrer que $\liminf_n \alpha_n^{\frac{1}{n}} \geq \|u\|_{L^\infty}$. Soit $0 < \epsilon < \|u\|_{L^\infty}$: on a

$$\alpha_n^{\frac{1}{n}} = \|u\|_{L^n} \geq \Big(\int_{|u(x)|\geq \|u\|_{L^\infty} - \epsilon} (\|u\|_{L^\infty} - \epsilon)^n d\mu\Big)^{1/n} = (\|u\|_{L^\infty} - \epsilon)\mu(\{x, |u(x)| \geq \|u\|_{L^\infty} - \epsilon\})^{1/n}.$$

Comme par définition de la norme $L^\infty$, on a

$$0 < \mu(\{x, |u(x)| \geq \|u\|_{L^\infty} - \epsilon\}) \leq \mu(X) < +\infty,$$

il vient

$$\liminf_n \alpha_n^{1/n} \geq \|u\|_{L^\infty} - \epsilon,$$

ceci pour tout $\epsilon > 0$. Par conséquent on obtient l'inégalité souhaitée et le résultat.

**Exercice 3.**
3.1. La fonction $E$ est mesurable positive. On calcule pour $T > 0$

$$\int_0^T (4\pi t)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \exp -\frac{\|x\|^2}{4t} dx dt = \int_0^T dt = T.$$

3.2. En outre pour $t > 0$, le même calcul montre que $\int_{\mathbb{R}^n} E(t,x)dx = 1$.
3.3. La fonction $u(t)$ est dans $L^1$ comme convolution de deux fonctions de $L^1$. On a

$$u(t)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \psi(x-y)(4\pi t)^{-n/2} \exp -\frac{\|y\|^2}{4t} dy = \int_{\mathbb{R}^n} \psi(x + z(4\pi t)^{1/2}) e^{-\pi \|z\|^2} dz.$$

Soit $\psi_k$ une suite de fonctions continues à support compact tendant vers $\psi$ dans $L^1$ et posons $\epsilon = (4\pi t)^{1/2}$. On a

$$u(t) - \psi = e(t) * \psi - \psi = e(t) * (\psi - \psi_k) - (\psi - \psi_k) + e(t) * \psi_k - \psi_k$$

et donc, pour un paramètre $M > 0$,

$$\begin{aligned} \|u(t) - \psi\|_{L^1} \leq 2\|\psi - \psi_k\|_{L^1} + \iint_{\mathbb{R}^n_x \times \{\|z\| \leq M\}} |\psi_k(x + \epsilon z) - \psi_k(x)| e^{-\pi\|z\|^2} dz dx \\ + \iint_{\mathbb{R}^n_x \times \{\|z\| > M\}} |\psi_k(x + \epsilon z) - \psi_k(x)| e^{-\pi\|z\|^2} dz dx. \end{aligned}$$

Le théorème de convergence dominée de Lebesgue appliqué à la première intégrale pour $\epsilon \to 0_+$ (la convergence simple vers 0 est assurée par la continuité de $\psi_k$, la domination par le support compact uniforme pour $0 \leq \epsilon \leq 1$) donne

$$\limsup_{t \to 0_+} \|u(t) - \psi\|_{L^1} \leq 2\|\psi - \psi_k\|_{L^1} + \int_{\{\|z\| > M\}} e^{-\pi\|z\|^2} dz 2\|\psi_k\|_{L^1}$$

et par suite en prenant la limite lorsque $k$ tend vers l'infini,

$$\limsup_{t \to 0_+} \|u(t) - \psi\|_{L^1} \leq \int_{\{\|z\| > M\}} e^{-\pi\|z\|^2} dz 2\|\psi\|_{L^1}$$

ceci pour tout $M > 0$. On a donc le résultat.
3.4. En écrivant pour $t > 0, x \in \mathbb{R}^n$

$$U(t,x) = \int_{\mathbb{R}^n} \psi(y)(4\pi t)^{-n/2} \exp -\frac{\|x-y\|^2}{4t} dy$$

et en posant $F(t,x,y) = (4\pi t)^{-n/2} \exp -\frac{\|x-y\|^2}{4t}$ on voit que

(i) $\int_{\mathbb{R}^n} |F(t,x,y)| dy < +\infty$
(ii) $(t,x) \mapsto F(t,x,y)$ est $C^\infty$ sur $\mathbb{R}^*_+ \times \mathbb{R}^n$
(iii) pour tout compact $K \subset \mathbb{R}^*_+ \times \mathbb{R}^n$, $\int_{\mathbb{R}^n} \sup_{(t,x)\in K} |\partial_t^k \partial_x^\alpha F(t,x,y)| dy < +\infty$.

Le dernier point est dû au fait (facile à établir par récurrence sur $k+|\alpha|$) que

$$\partial_t^k \partial_x^\alpha F(t,x,y) = \psi(y) Q_{k\alpha}(t^{-1/2}, x-y) \exp -\frac{\|x-y\|^2}{4t}$$

où $Q_{k\alpha}$ est un polynôme. $U$ est donc $C^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^n$.
3.5. On calcule alors directement sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^n$

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \int_{R^n} \psi(y)(4\pi t)^{-n/2} \exp -\frac{\|x-y\|^2}{4t} \left[ -\frac{n}{2t} + \frac{\|x-y\|^2}{4t^2} \right] dy$$

et

$$\frac{\partial U}{\partial x_j} = \int_{R^n} \psi(y)(4\pi t)^{-n/2} \exp -\frac{\|x-y\|^2}{4t} \left[ -\frac{(x_j-y_j)}{2t} \right] dy.$$

Ceci donne

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x_j^2} = \int_{R^n} \psi(y)(4\pi t)^{-n/2} \exp -\frac{\|x-y\|^2}{4t} \left[ \frac{(x_j-y_j)^2}{4t^2} - \frac{1}{2t} \right] dy$$

puis

$$\sum_{1\le j\le n} \frac{\partial^2 U}{\partial x_j^2} = \int_{R^n} \psi(y)(4\pi t)^{-n/2} \exp -\frac{\|x-y\|^2}{4t} \left[ \frac{\|x-y\|^2}{4t^2} - \frac{n}{2t} \right] dy = \frac{\partial U}{\partial t}.$$