Université de Rennes 1, Licence de Mathématiques, Intégration 1

Examen partiel, samedi 18 novembre 2000, 10h30–12h30

Hall du second cycle, Bâtiment 2

Justifiez vos affirmations. Séparez nettement les exercices. Aucun document n'est autorisé.

Exercice 1 (7 points)
1.1. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \geq 0$, on pose $f_n(x) = \dfrac{ne^{-x}}{nx^{1/2}+1}\cos x$. Montrer que f_n appartient à $L^1(\mathbb{R}_+)$.
1.2 Montrer que la suite $a_n = \int_{\mathbb{R}_+} f_n(x)dx$ converge lorsque n tend vers $+\infty$ vers $\int_{\mathbb{R}_+} f(x)dx$ où $f \in L^1(\mathbb{R}_+)$. On donnera une expression explicite de f sans chercher à calculer $\lim a_n$.
Exercice 2 (7 points)
Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré où μ est une mesure positive.
2.1. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{M}$ telle que $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) < +\infty$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $B_n = \cup_{k\geq n} A_k$. Montrer que $\mu(\cap_{n\in\mathbb{N}} B_n) = 0$.
2.2. Soit ν une mesure positive sur $(X, \mathcal{M})$. On dit que ν est dominée par μ si

$$\forall A \in \mathcal{M},\ \mu(A) = 0 \Longrightarrow \nu(A) = 0.$$

On suppose que $\nu(X) < +\infty$. Montrer que si ν est dominée par μ,

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall A \in \mathcal{M},\ \mu(A) < \delta \Longrightarrow \nu(A) < \epsilon$$

(on pourra raisonner par l'absurde).
Exercice 3 (6 points)
Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré où μ est une mesure positive telle que $\mu(X) < +\infty$. Une famille de fonctions mesurables $(u_i)_{i\in I}$ est dite équi-intégrable si

$$\lim_{t\to+\infty} \left(\sup_{i\in I} \int_{E_i(t)} |u_i| d\mu \right) = 0, \text{ avec } \quad E_i(t) = \{x \in X, |u_i(x)| > t\}.$$

3.1. On considère une famille $(u_i)_{i\in I}$ de fonctions mesurables de X dans $\mathbb{C}$. Montrer que si $(u_i)_{i\in I}$ est équi-intégrable alors

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall A \in \mathcal{M},\ \mu(A) < \delta \Longrightarrow \sup_{i\in I} \int_A |u_i| d\mu < \epsilon.$$

3.2. On considère une suite équi-intégrable $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions mesurables de X dans $\mathbb{C}$, convergeant μ-presque partout vers une fonction u. Montrer que, pour $\epsilon > 0$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \mu\big(\{|u_n - u| > \epsilon\}\big) = 0.$$

Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $L^1(\mu)$.