Université de Rennes 1, Licence de Mathématiques, Intégration 1

Examen partiel, samedi 10 novembre 2001, 10h30–12h30

Hall du second cycle, Bâtiment 2

Justifiez vos affirmations. Séparez nettement les exercices. Aucun document n'est autorisé.

Exercice 1 (7 points)
1.1. Soit $(X, \mathcal{M})$ un espace mesurable. Donner la définition d'une mesure positive μ définie sur $\mathcal{M}$.
1.2. Donner l'énoncé du théorème de Beppo Levi.
1.3. Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré où μ est une mesure positive et soit $f : X \to \mathbb{C}$ une fonction mesurable. Que signifie l'affirmation "f est nulle μ-presque partout "?
1.4. Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré où μ est une mesure positive et soit $f : X \to \mathbb{C}$ une fonction de $\mathcal{L}^1(\mu)$. On pose pour $\theta \geq 0$

$$A_\theta = \{x \in X, |f(x)| > \theta\}.$$

Montrer que pour tout $\theta > 0$, $A_\theta \in \mathcal{M}$ et $\mu(A_\theta) < +\infty$. Montrer qu'il existe une suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{M}$ telle que

$$A_0 = \cup_{n\in\mathbb{N}} B_n$$

avec pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mu(B_n) < +\infty$.

Exercice 2 (7 points)
Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré où μ est une mesure positive et soit $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables de X dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ telle que,

$$\int_X (\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n) d\mu < +\infty.$$

Montrer que $\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n$ est finie μ-presque partout et que

$$\int_X (\liminf_k f_k) d\mu \leq \liminf_k \int_X f_k d\mu \leq \limsup_k \int_X f_k d\mu \leq \int_X (\limsup_k f_k) d\mu < +\infty.$$

Exercice 3 (6 points)
Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré où μ est une mesure positive. Soit $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{L}^1(\mu)$ tendant simplement vers une fonction f et telle que

$$\liminf_k \int_X |f_k| d\mu < +\infty.$$

3.1. Montrer que f appartient à $\mathcal{L}^1(\mu)$.
3.2. On suppose en outre que

$$\lim_{k\to+\infty} \int_X |f_k| d\mu = \int_X |f| d\mu.$$

Montrer que

$$\lim_{k\to+\infty} \int_X |f - f_k| d\mu = 0.$$