Université de Rennes 1, Licence de Mathématiques, Intégration 1

Examen final, jeudi 17 janvier 2002, 8h–11h, Hall du second cycle

Justifiez vos affirmations. Séparez nettement les exercices. Aucun document n'est autorisé.

Exercice 1 (7 points)
1.1. Donner la définition de la tribu des boréliens sur $\mathbb{R}$.
1.2. Donner l'énoncé du théorème de convergence dominée de Lebesgue *(on se limitera à l'énoncé le plus simple ne faisant pas intervenir d'ensembles de mesure nulle)*.
1.3. Soient $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ des réels tels que $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$. Soit f une fonction de $L^1(\mathbb{R}^2)$ telle que $\iint_{\mathbb{R}^2} f(s,t)dsdt = 1$. Calculer

$$I(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = \iint_{\mathbb{R}^2} f(\alpha x + \beta y, \gamma x + \delta y)dxdy.$$

1.4. Donner un exemple d'une fonction non bornée sur $[0,1]$ appartenant à $L^1([0,1])$.
1.5. Soit B la boule unité euclidienne de $\mathbb{R}^3$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur le réel α pour que

$$J(\alpha) = \iiint_B (x^2 + y^2 + z^2)^{-\alpha/2} dxdydz < +\infty.$$

Exercice 2 (8 points)
2.1. On pose

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^x}{1+t^2} dt.$$

Montrer que F est une fonction continue sur $]-1,1[$.
2.2. Calculer $\lim_{x\to(-1)_+} F(x)$ et $\lim_{x\to 1_-} F(x)$ (*on pourra utiliser le lemme de Fatou*).
2.3. Montrer que la fonction F est indéfiniment dérivable sur $]-1,1[$ et donner une expression intégrale de $F^{(k)}(x)$.
2.4. En utilisant l'inégalité de Hölder, démontrer que, pour tout $x \in]-1,1[$,

$$F'(x)^2 \leq F(x)F''(x).$$

Exercice 3 (5 points)
Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré où μ est une mesure positive et soit $p \in]1, +\infty[$. Soient u, v des fonctions appartenant à $L^p(\mu)$. Pour $t \in \mathbb{R}$, on pose

$$f(t) = \int_X |u + tv|^p d\mu.$$

3.1. Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $0 \leq f(t) \leq \left(\|u\|_{L^p(\mu)} + |t| \, \|v\|_{L^p(\mu)}\right)^p$.
3.2. Montrer que $|u|^{p-1}|v|$ appartient à $L^1(\mu)$.
3.3. Soient U, V des nombres complexes. Pour $t \in \mathbb{R}$, on pose $\varphi(t) = |U + tV|^p$. Montrer que φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\varphi'(t) = p|U+tV|^{p-2} \operatorname{Re}\big((U+tV)\overline{V}\big) \text{ si } U+tV \neq 0, \quad \varphi'(t) = 0 \text{ si } U+tV = 0.$$

En déduire que $|\varphi'(t)| \leq p|U+tV|^{p-1}|V|$.
3.4. Montrer que f est dérivable en 0 et calculer $f'(0)$.